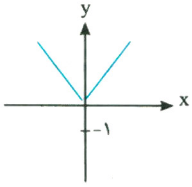
تبدیل نمودار توابع

برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ ، اگر $k>0$ باشد، کافیست نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت پایین انجام شود.

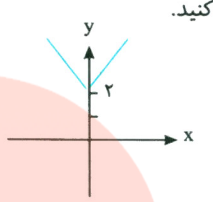
مثال نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل روبه‌رو است.



نمودار توابع زیر را رسم کنید.

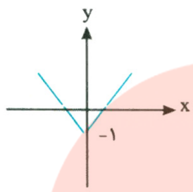
الف) $y=f(x)+k$

$y=f(x)+2$



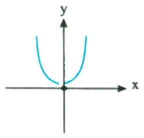
ب) $y=f(x)-k$

$y=f(x)-1$



برای رسم نمودار $y=f(x+k)$ اگر $k>0$ باشد، کافیست نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، کافیست این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت راست انجام شود.

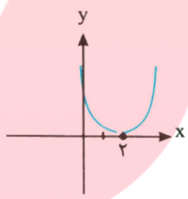
مثال نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل مقابل است:



نمودار توابع زیر را رسم کنید.

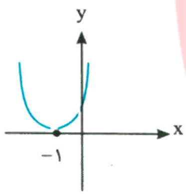
الف) $y=f(x+k)$

$y=f(x-2)$



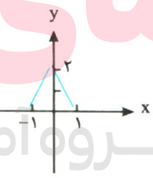
ب) $y=f(x-k)$

$y=f(x+1)$



برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم. در مثال‌های زیر، نمودار تابع $y=kf(x)$ برای دو حالت $k>1$ و $0<k<1$ رسم شده است.

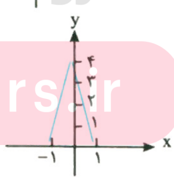
مثال نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل



است. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

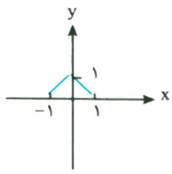
الف) $y=kf(x), k>1$

$y=2f(x)$



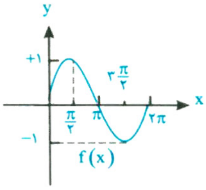
ب) $y=kf(x)\ ,\ 0<k<1$

$y=\frac{1}{2}f(x)$

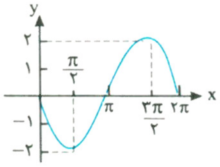


اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور xها است.

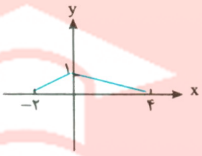
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

مثال نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل  است، نمودار تابع $y=-۲f(x)$ را رسم کنید.

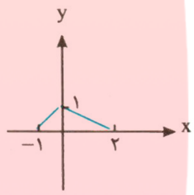
$y=-۲f(x)$



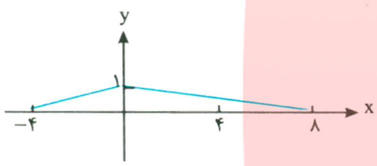
برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ ، $k>۰$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

مثال اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت  باشد، نمودار تابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید.

الف) $y=f(۲x)$
$k>۱$

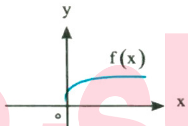


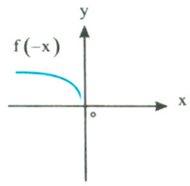
ب) $y=f(\frac{۱}{۲}x)$
$۰<k<۱$



توجه با توجه به شکل‌های بالا ملاحظه می‌شود، اگر $|k|>۱$ باشد، نمودار تابع $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $۰<|k|<۱$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور yها است.

مثال اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل  باشد، نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم کنید.



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

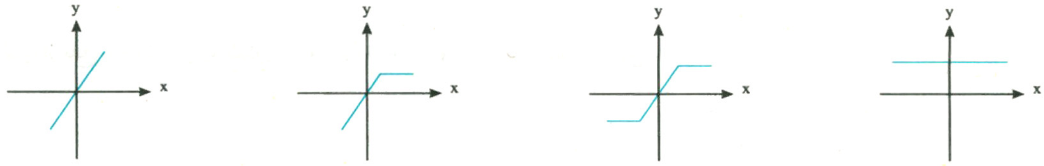
هر تابع به شکل $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$ را که در آن n یک عدد صحیح نامنفی، $a_۱, a_۲, \ldots$ و a_n اعداد حقیقی و $a_n\neq ۰$ هستند، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n گویند.

توابع صعودی و توابع نزولی

تابع حقیقی f را در نظر بگیرید، اگر $x_۱, x_۲\in D_f$ باشند.

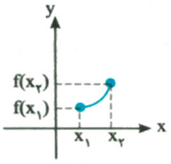
الف) اگر با افزایش مقادیر x، مقادیر $f(x)$ افزایش یابد یا ثابت بماند، تابع $f(x)$ را تابع صعودی می‌نامند یا به عبارت دیگر تابع f را در مجموعه A ($A\subseteq D_f$) صعودی گویند هرگاه در این مجموعه اگر $x_۱, x_۲\in A, x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\le f(x_۲)$

مانند:



ب) اگر با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ نیز افزایش یابد، $f(x)$ را تابع صعودی اکید می‌نامند یا به عبارت دیگر تابع f را در یک مجموعه اکیداً صعودی گویند هرگاه $x_1, x_2 \in A \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

مانند:

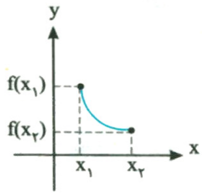


پ) اگر با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ کاهش یابد و یا ثابت بماند، تابع $f(x)$ را تابع نزولی می‌نامند یا به عبارت دیگر تابع f را در مجموعه A ($A \subseteq D_f$) نزولی گویند هرگاه در این مجموعه اگر: $x_1, x_2 \in A \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

مانند:

ت) اگر با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ کاهش یابد، تابع $f(x)$ را تابع نزولی اکید گویند یا به عبارت دیگر تابع f را در یک مجموعه اکیداً نزولی گویند هرگاه $x_1, x_2 \in A \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

مانند:



مای درس

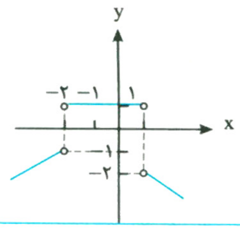
توجه ۱) اگر تابع $f(x)$ در مجموعه A فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، $f(x)$ را در مجموعه A تابع یکنوا گویند.

۲) اگر تابع $f(x)$ در مجموعه A فقط صعودی اکید یا فقط نزولی اکید باشد، تابع $f(x)$ را در مجموعه A تابع یکنوای اکید گویند.

۳) هر تابع صعودی اکید، تابعی صعودی و هر تابع نزولی اکید، تابعی نزولی است و عکس این مطلب لزوماً صحیح نیست.

مثال نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید.

www.my-dars.ir



$(-\infty, -2)$: صعودی اکید

$(-2, 1)$: ثابت

$(1, +\infty)$: نزولی اکید

@riaziT

تقسیم و بخش‌پذیری

قضیهٔ تقسیم: اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چندجمله‌ای و درجهٔ $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه توابع چندجمله‌ای منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند که:
$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$
که در آن درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کم‌تر است.

محاسبهٔ باقی ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-a$

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ صفر باشد، $f(x)=p(x)q(x)$ می‌شود که در این حالت می‌گوییم $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

نکته اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $(x-a)$ برابر $f(a)$ است و آن را با $f(a)=r$ نمایش می‌دهند.

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=2x^2-3x+5$ را بر $x-1$ به‌دست آورید.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$
$$p(1)=2(1)^2-3(1)+5=7-3=4$$

توجه اتحادهای زیر همواره برقرار هستند.

1) $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$

2) $x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1})$ — nهای فرد

3) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+1)$

4) $x^n-1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-1)$ — nهای زوج

5) $x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+1)$ — nهای فرد

مثال به کمک تجزیه، کسر زیر را ساده کنید.

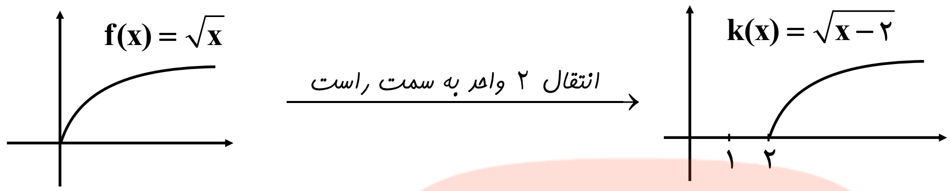
$$\frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x^4-x^3+x^2-x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}=x^4-x^3+x^2-x+1$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

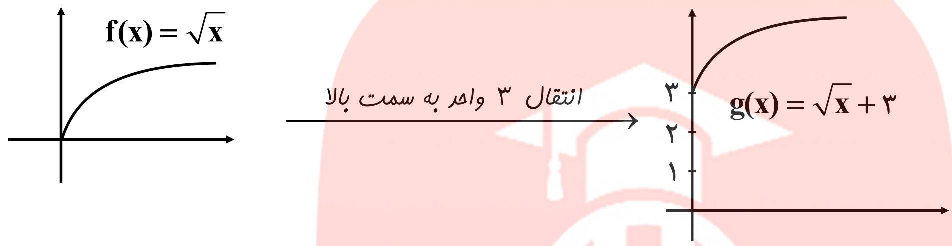
سوالات مربوط به رسم نمودار

۱- به کمک نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار تابع $k(x)=f(x-۲)$ و $g(x)=f(x)+۳$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

پاسخ:



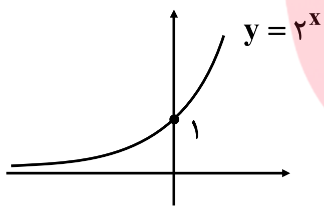
$$\Rightarrow \begin{cases} D_k = [۲,+\infty) \\ R_k = [۰,+\infty) \end{cases}$$

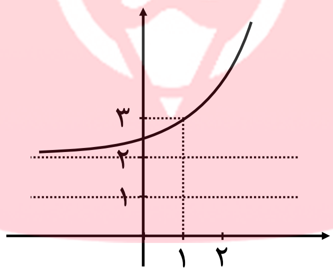


$$\Rightarrow \begin{cases} D_y = [۰,+\infty) \\ R_k = [۳,+\infty) \end{cases}$$

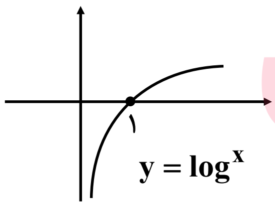
۲- به کمک نمودار توابع $y=۲^x$ و $y=\log^x$ و $y=\cos x$، نمودار توابع $y=۲^{x-۱}+۲$ و $y=\log^{(x-۲)}$ و $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$ را رسم کنید.

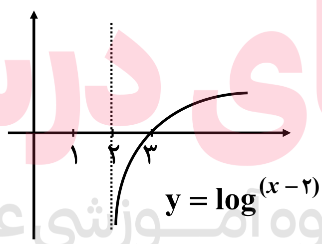
۱)



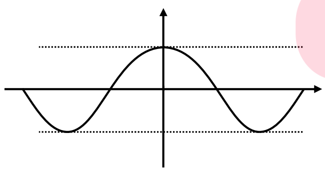


۲)

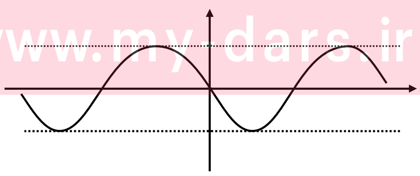




۳)



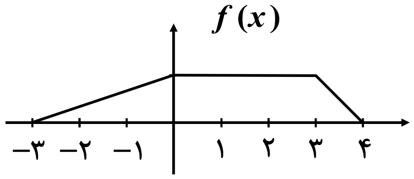
$y = \cos x$

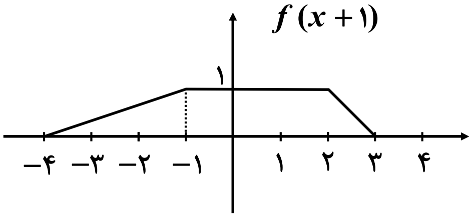


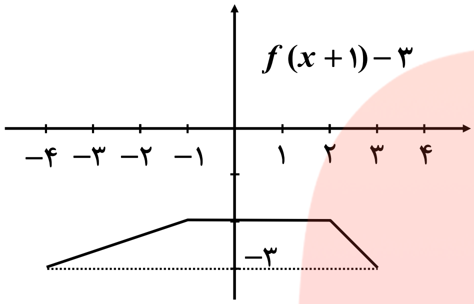
$y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۳- نمودار توابع f به صورت روبه‌رو داده شده است. با انتقال عمودی و افقی، نمودار تابع $y=f(x+۱)-۳$ را رسم کنید.







۴- اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y=kf(x)$ را تعیین کنید.

پاسخ: حالت اول: $k>۰$ ← چون k در کل $f(x)$ ضرب شده است، پس تأثیری در دامنه ندارد.

$$D_f=[a,b], R_f=[k_c,k_d]$$

حالت دوم: $k<۰$ ← چون k در کل $f(x)$ ضرب شده است، پس تأثیری در دامنه ندارد.

$$D_f=[a,b], R_f=[k_d,k_c]$$

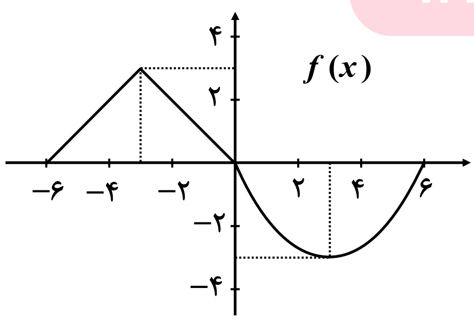
۵- اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y=f(kx)$ را تعیین کنید.

پاسخ: چون k فقط در x ضرب شده است پس تأثیری در برد ندارد.

$$I)\, k>۰ \Rightarrow D_f=[\frac{a}{k},\frac{b}{k}], R_f=[c,d]$$

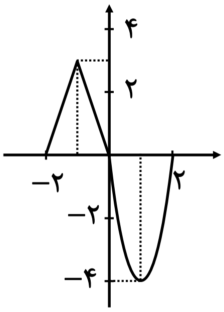
$$II)\, k<۰ \Rightarrow D_f=[\frac{b}{k},\frac{a}{k}], R_f=[c,d]$$

۶- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشند، نمودار تابع $y=f(۳x)$ و $y=f(\frac{-x}{۲})$ را رسم کنید.

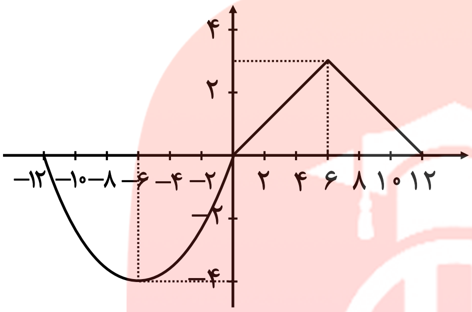


مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

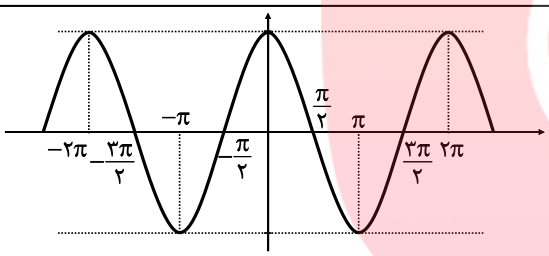
$y=f(3x)$



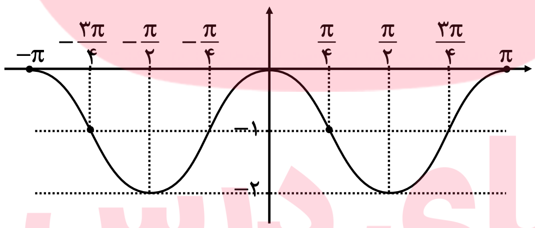
$y=f(\frac{-x}{2})$



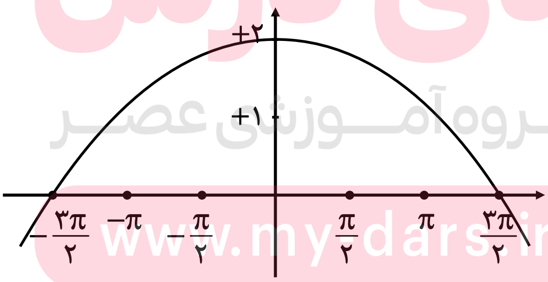
۷- نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنید:



۱) $y=\cos 2x-1$



$y=2\cos(\frac{x}{3})$

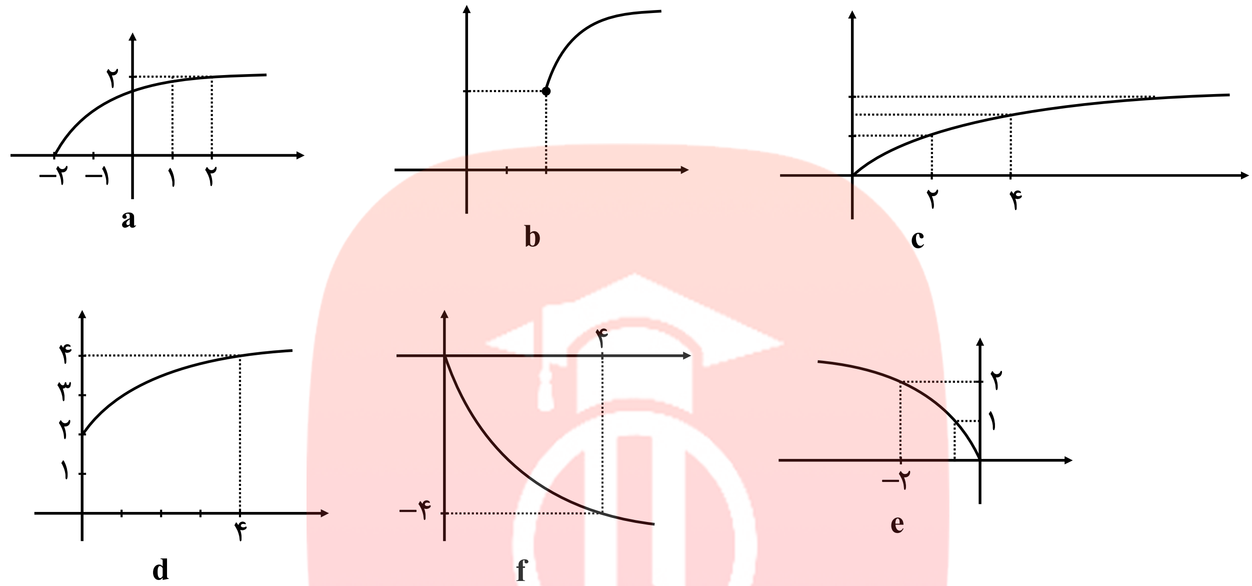


www.mydars.ir
مای درس
گروه آموزشی عصر

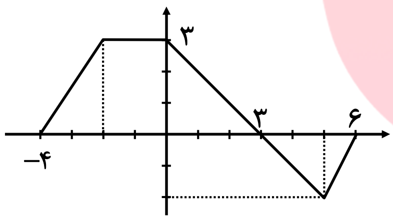
۸- هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{۲+x}$ $\quad a$ ب) $y=۲+\sqrt{x}$ $\quad d$ پ) $y=-۲\sqrt{x}$ $\quad f$

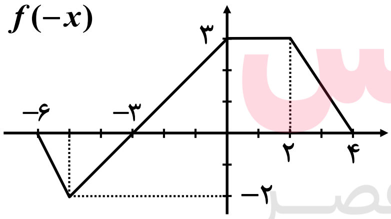
ت) $y=\sqrt{\frac{x}{۲}}$ $\quad c$ ث) $y=۲+\sqrt{x-۲}$ $\quad b$ ج) $y=\sqrt{-۲x}$ $\quad e$



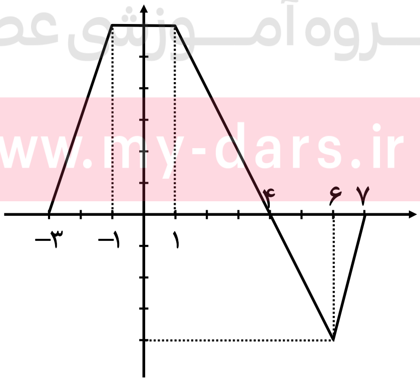
۹- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



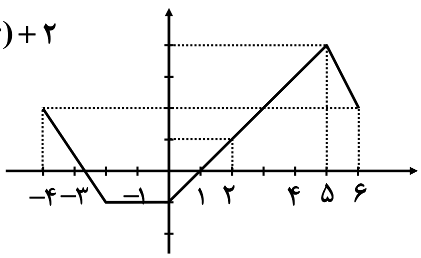
الف) $y=f(-x)$



ب) $y=۲f(x-۱)$

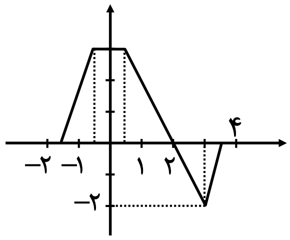


پ) $y=-f(x)+۲$

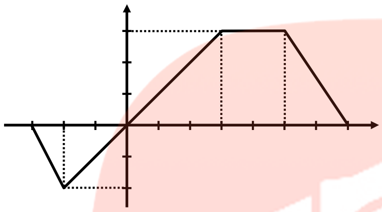


@riaziT

ت) $y=f(۲x-۱)$

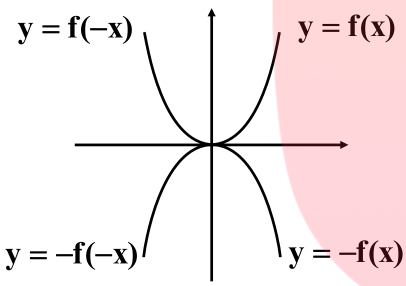


ث) $y=f(۳-x)$

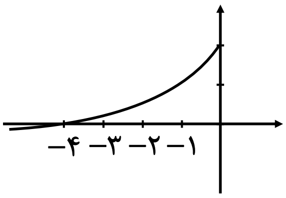


۱۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را به کمک آن رسم کنید.

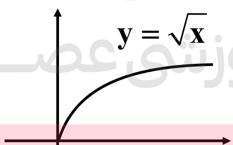
الف) $y=f(-x)$ ب) $y=-f(x)$ پ) $y=-f(-x)$



۱۱- نمودار تابع مقابل از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ بدست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



پاسخ: می‌دانیم نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به صورت مقابل است:



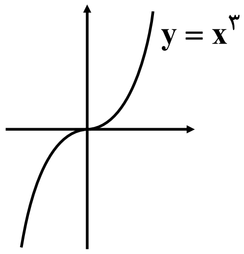
حال برای رسیدن به نمودار تابع داده شده باید نمودار تابع $g=\sqrt{x}$ را نسبت به محورهای x و y قرینه و سپس ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم:

$-f(-x)+۲=-\sqrt{-x}+۲ \Rightarrow y=۲-\sqrt{-x}$

@riaziT

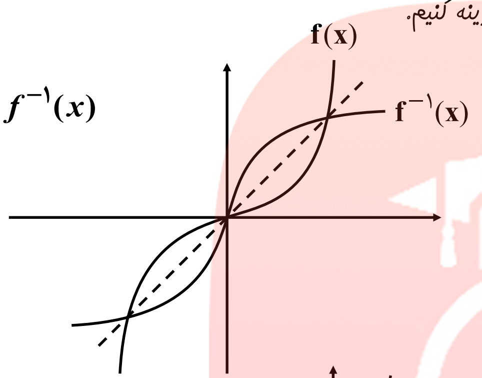
سوالات مربوط به تابع درجه سوم

۱- به کمک نمودار تابع $f(x)=x^3$، نمودارهای زیر را رسم کنید:

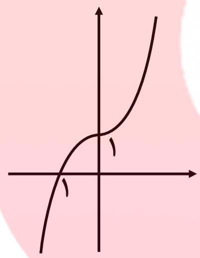


پاسخ: برای رسم تابع وارون، کافی است نمودار را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

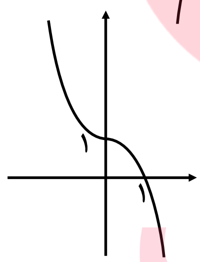
الف) $y=f^{-1}(x)$



ب) $y=(x+1)^3$



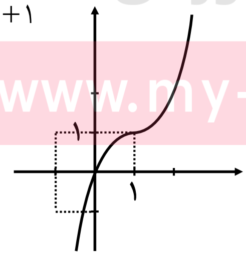
پ) $y=-x^3+1$



ت) $y=x^3-3x^2+3x$

پاسخ: برای رسم این تابع می‌توانیم ابتدا عدد ۱ را اضافه و کم کنیم تا بتوانیم اتحاد مکعب تشکیل دهیم.

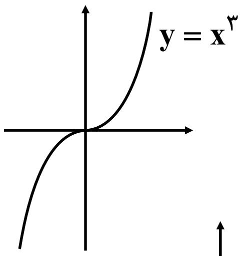
$$y=x^3-3x^2+3x+1-1=(x-1)^3+1$$

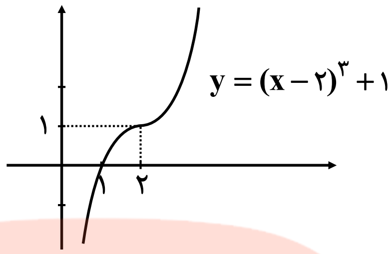


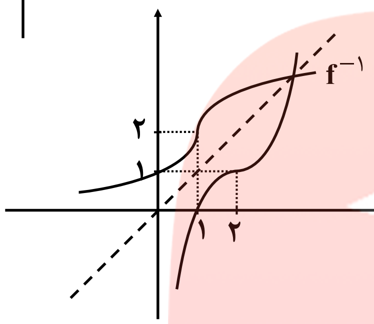
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۲- الف) نمودار تابع $y=(x-2)^3+1$ را به کمک تابع $y=x^3$ رسم کنید.

ب) نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را رسم و سپس ضابطه‌ی آنرا بیابید.







$$y=(x-2)^3+1 \rightarrow x=(y-2)^3+1 \rightarrow (y-2)^3=x-1$$
$$\Rightarrow y-2=\sqrt[3]{x-1} \rightarrow y=2+\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=2+\sqrt[3]{x-1}$$

سوالات مربوط به توابع صعودی و نزولی

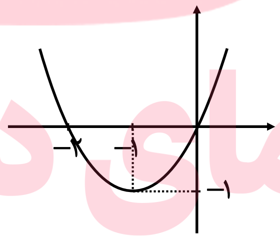
۱- نمودار توابع $y=x^2+2x$ و $y=2^{-x}$ و $y=|x+2|$ را رسم کنید و مشخص کنید این توابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند.

الف) $y=x^2+2x \xrightarrow{\text{عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم}}$

$y=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1$

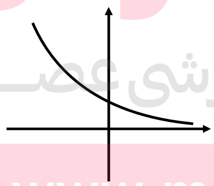
$(-\infty,-1] \rightarrow$ اکیداً نزولی

$[-1,+\infty) \rightarrow$ اکیداً صعودی



ب) $y=2^{-x}$

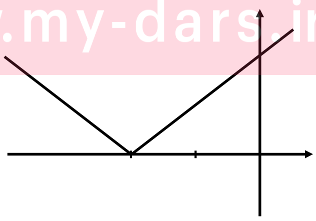
$(-\infty,+\infty) \rightarrow$ اکیداً نزولی



پ) $y=|x+2|$

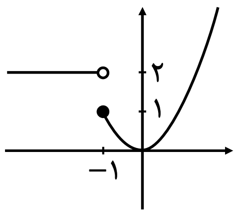
$(-\infty,-2] \rightarrow$ اکیداً نزولی

$[-2,+\infty) \rightarrow$ اکیداً صعودی



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۲- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\ge -۱ \\ ۲ & x<-۱ \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



$(-\infty,۰] \rightarrow$ نزولی
$[۰,+\infty) \rightarrow$ صعودی

۳- فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشد. اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\le b$.

پاسخ: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $a>b$ باشد پس باید $f(a)>f(b)$ می‌باشد و از طرفی چون تابع اکیداً صعودی است پس این نتیجه خلاف فرض است.

۴- اگر $\log^{(x+۱)}\le \log^{(۲x-۳)}$، حدود x را بدست آورید.

پاسخ: چون مبنای لگاریتم بزرگتر از یک است داریم:

$$\log^{(x+۱)}\le \log^{(۲x-۳)} \Rightarrow x+۱\le ۲x-۳ \Rightarrow x\ge ۴$$

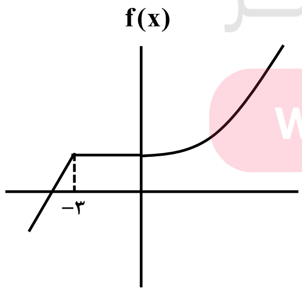
۵- فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a)\le f(b)$، نشان دهید که $a\ge b$

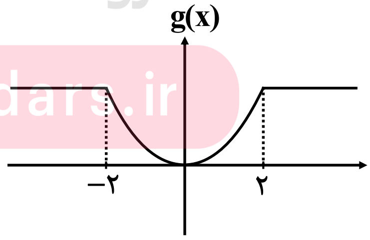
پاسخ: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $b>a$ باشد پس باید $f(a)>f(b)$ شود که این نتیجه خلاف فرض است.

۶- اگر $(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}\le \frac{۱}{۶۴}$، حدود x را بدست آورید.

$$(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}\le (\frac{۱}{۲})^{۶} \xrightarrow[\text{تابع نزولی است و داریم}]{\text{چون مبنا بین صفر تا یک است}} ۶\ge ۳x-۲ \Rightarrow x\le \frac{۸}{۳}$$

۷- نمودارهای توابع g و f در زیر رسم شده‌اند مشخص کنید تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی و تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟





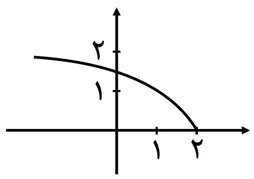
$\begin{cases} x\in(-\infty,-۳]\cup[۰,+\infty) \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ x\in(-\infty,+\infty) \rightarrow \text{صعودی} \end{cases}$

$\begin{cases} x\in(-\infty,۰]\cup[۲,+\infty) \rightarrow \text{نزولی} \\ x\in[-۲,۰] \rightarrow \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$

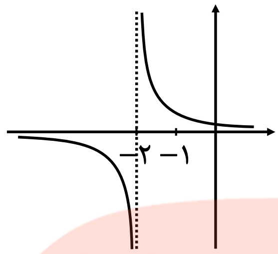
های درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۸- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در دامنه خود، اکیداً یکنوا هستند؟

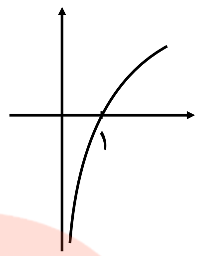
الف) $f(x)=\sqrt{2-x}$ ب) $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ج) $h(x)=\log_2^x$



اکیداً نزولی



نه صعودی و نه نزولی



اکیداً صعودی

سوالات مربوط به بخش‌پذیری

۱- باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای x^3+x-1 بر $2x+1$ را بدست آورید:

پاسخ: برای بدست آوردن باقی‌مانده کافی است ریشه مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم:

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \text{باقی‌مانده } R_{(x)}=(-\frac{1}{2})^3+(-\frac{1}{2})-1=\frac{-13}{8}$$

۲- اگر چند جمله‌ای x^2+ax-2 بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

پاسخ: چون مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر است، پس باقی‌مانده برابر صفر می‌باشد.

$$x-a=0 \Rightarrow x=a$$
$$R(x)=a^2+a(a)-2=0 \Rightarrow 2a^2=2 \to a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۳- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای x^3+kx^2+2 بر $x-2$ برابر ۶ باشد، k را تعیین کنید.

پاسخ: اگر مقسوم را برابر $f(x)$ در نظر بگیریم آنگاه داریم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$
$$f(2)=6 \Rightarrow (2)^3+k(2)^2+2=6 \Rightarrow 4k=-4 \to k=-1$$

۴- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

پاسخ: چون مقسوم بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر است، پس: $\left.\begin{matrix} f(2)=0 \\ f(-1)=0 \end{matrix}\right\}$

$$f(2)=(2)^3+a(2)^2+b(2)+1=0 \to 4a+2b=-9$$
$$f(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1=0 \to a-b=0 \Rightarrow a=b$$
$$4a+2b=-9 \xrightarrow{a=b} 4b+2b=-9 \to 6b=-9 \to b=-\frac{3}{2} \to a=-\frac{3}{2}$$

۵- چند جمله‌ای‌های x^5-1 و x^6-64 را به کمک اتحادها باز کنید.

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$x^6-64=(x-2)(x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32)$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۶- عبارت $x^{۵}+۱$ را بر حسب $(x+۱)$ تجزیه کنید:

$$x^{۵}+۱=(x+۱)(x^{۴}-x^{۳}+x^{۲}-x+۱)$$

۷- هر یک از چندجمله‌های زیر را بر حسب عبارت خواسته شده تجزیه کنید:

الف) $x^{۶}-۱$ بر حسب $x-۱$

$$(x^{۶}-۱)=(x-۱)(x^{۵}+x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱)$$

ب) $x^{۶}-۱$ برحسب $x+۱$

$$(x^{۶}-۱)=(x+۱)(x^{۵}-x^{۴}+x^{۳}-x^{۲}+x-۱)$$

پ) $x^{۵}+۳۲$ بر حسب $x+۲$

$$x^{۵}+۳۲=(x+۲)(x^{۴}-۲x^{۳}+۴x^{۲}-۸x+۱۶)$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

@riaziT

تابع متناوب: تابع f در $\mathbb{R}$ با دامنهٔ D_f را یک تابع متناوب گویند، هرگاه عدد مثبتی مانند $T \neq 0$ وجود داشته باشد که:

$$1)\ \forall x \in D_f : (x+T) \in D_f$$

$$2)\ \forall x \in D_f : f(x+T) = f(x)$$

کوچک‌ترین T را دورهٔ تناوب تابع می‌گویند.

مثال: ثابت کنید $f(x) = \sin x$ دارای دورهٔ تناوب $T = 2\pi$، می‌باشد.

$$1)\ D_f = \mathbb{R}\ ,\ x \in D_f \Rightarrow (x+2\pi) \in D_f$$

$$2)\ f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x)$$

بین دوره‌ها متناوب $f(x)$ (مثلاً 4π، 6π، ...)، 2π از همه کوچک‌تر است. پس تابع فوق متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن $T = 2\pi$ است.

نکته: توابع به شکل $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

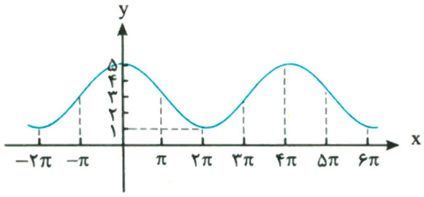
$$-|a|+c \leq a\sin bx + c \leq |a|+c$$

$$-|a|+c \leq a\cos bx + c \leq |a|+c$$

@riaziT

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

مثال نمودار زیر مربوط به تابع $y = a\cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم، ضابطهٔ آن را مشخص کنید.



با توجه به شکل، ماکزیمم این تابع برابر ۵ و مینیمم آن برابر ۱ است، پس:

$$-\begin{cases}|a|+c=5\\-|a|+c=1\end{cases} \Rightarrow 2|a|=4 \Rightarrow |a|=2$$

$$|a|+c=5 \Rightarrow 2+c=5 \Rightarrow c=3$$

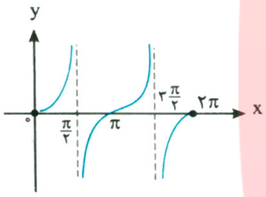
با توجه به تأثیری که منفی بودن a بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محور xها دارد، باید a مثبت باشد.

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=4\pi \Rightarrow 2\pi=4\pi|b| \Rightarrow |b|=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$

$$y=2\cos(\frac{\pm1}{2}x)+3=2\cos(\frac{x}{2})+3$$

توجه دارید که برای cos،منفی بودن یا مثبت بودن b تأثیری ندارد.

توجه در مورد تابع $y=\tan x$ ، با توجه به نمودار آن، در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ تابعی صعودی است.



اتحادهای مثلثاتی

۱) $\sin^2 a+\cos^2 a=1$

۲) $\sin 2a=2\sin a\cos a$

۳) $\cos 2a=\begin{cases}\cos^2 a-\sin^2 a\\2\cos^2 a-1\\1-2\sin^2 a\end{cases}$

۴) $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$

۵) $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

۶) $\sin a+\cos a=\sqrt{2}\sin(a+\frac{\pi}{4})$

۷) $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

۸) $\cot 2a=\frac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

۹) $\sin 2a=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$

۱۰) $\cos 2a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

۱۱) $\sin(\frac{\pi}{2}+a)=\cos a$

۱۲) $\cos(\frac{\pi}{2}+a)=-\sin a$

۱۳) $\tan(\frac{\pi}{2}+a)=-\cot a$

۱۴) $\cot(\frac{\pi}{2}+a)=-\tan a$

۱۵) $\sin(\frac{\pi}{2}-a)=\cos a$

۱۶) $\cos(\frac{\pi}{2}-a)=\sin a$

۱۷) $\tan(\frac{\pi}{2}-a)=\cot a$

۱۸) $\cot(\frac{\pi}{2}-a)=\tan a$

۱۹) $\sin(\pi+a)=-\sin a$

۲۰) $\cos(\pi+a)=-\cos a$

۲۱) $\tan(\pi+a)=\tan a$

۲۲) $\cot(\pi+a)=\cot a$

۲۳) $\sin(\pi-a)=\sin a$

۲۴) $\cos(\pi-a)=-\cos a$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۲۵) $\tan(\pi - a) = -\tan a$

۲۶) $\cot(\pi - a) = -\cot a$

۲۷) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

۲۸) $\cos(-\theta) = \cos\theta$

۲۹) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

۳۰) $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

۳۱) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

۳۲) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

۳۳) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

۳۴) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

۳۵) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

۳۶) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

۳۷) $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

۳۸) $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

۳۹) $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

۴۰) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

۴۱) $\sin a\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

۴۲) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

۴۳) $\sin A - \sin B = 2\sin\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}$

۴۴) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

۴۵) $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

۴۶) $\tan A + \tan B = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$

۴۷) $\tan A - \tan B = \dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$

۴۸) $\cot A + \cot B = \dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}$

۴۹) $\cot A - \cot B = \dfrac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}$

۵۰) $\cot\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right) = \dfrac{\cot a - 1}{\cot a + 1}$

۵۱) $\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - a\right) = \dfrac{1 + \cot a}{\cot a - 1}$

۵۲) $1 - \cos a = 2\sin^2\dfrac{a}{2}$

۵۳) $1 + \cos a = 2\cos^2\dfrac{a}{2}$

حل معادلات مثلثاتی

الف) جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin\alpha$ به صورت مقابل است: $x = 2k\pi + \alpha \quad , \quad x = 2k\pi + \pi - \alpha \; , \; k \in \mathbb{Z}$

ب) جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos\alpha$ به صورت مقابل است: $x = 2k\pi \pm \alpha \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

پ) جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan\alpha$ به صورت مقابل است: $x = k\pi + \alpha \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

ت) جواب‌های کلی معادله $\cot x = \cot\alpha$ به صورت مقابل است: $x = k\pi + \alpha \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

ث) حالت‌های خاص:

۱) $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

۲) $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

۳) $\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

۴) $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

۵) $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

۶) $\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

مثال معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$1)\ \sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2)\ \cos x = \cos 2x \Rightarrow \cos x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \cos x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{+1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$3)\ \tan 3x = \tan \pi x \Rightarrow 3x = k\pi + \pi x \Rightarrow (3 - \pi)x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{-\pi + 3},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$4)\ \sin 2x = \tan x \Rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2\sin x \cos^2 x = \sin x \Rightarrow 2\sin x \cos^2 x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(2\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x(\cos 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}$$

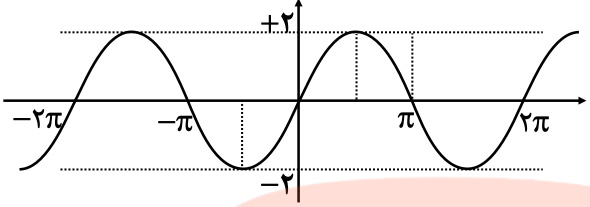
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

سوالات مربوط به دوره تناوب، ماکزیمم، مینیمم و تانژانت

فصل دوم

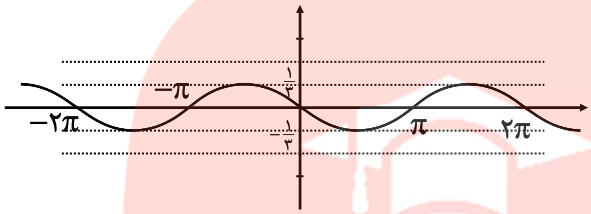
۱- در نمودارهای زیر مقدار ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب را مشخص کنید:

$y=۲\sin x$



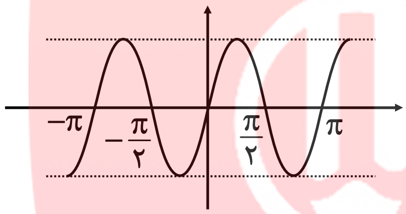
$\max=۲$ $\min=-۲$
$T=۲\pi$

$y=-\frac{۱}{۳}\sin x$



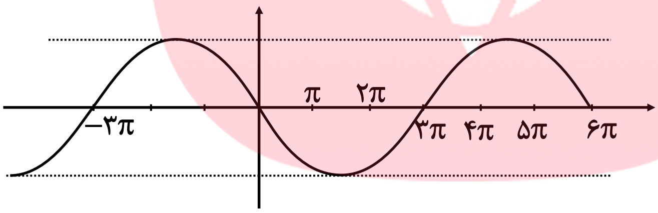
$\max=\frac{۱}{۳}$ $\min=-\frac{۱}{۳}$
$T=۲\pi$

$y=\sin(۲x)$



$\max=۱$ $\min=-۱$
$T=\pi$

$y=\sin(-\frac{x}{۳})$



$\max=۱$ $\min=-۱$
$T=۶\pi$

۲- دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $y=۳\sin(۲x)-۲$

$\max=|۳|-۲=۱$ $\min=-|۳|-۲=-۵$ $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$

ب) $y=-\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

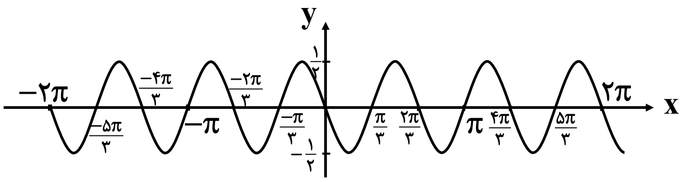
$\max=|-\frac{۱}{۴}|=\frac{۱}{۴}$ $\min=-|-\frac{۱}{۴}|=-\frac{۱}{۴}$ $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$

پ) $y=\pi\sin(-x)+۱$

$\max=|\pi|+۱=\pi+۱$ $\min=-|\pi|+۱=۱-\pi$ $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{|-۱|}=۲\pi$

۳- هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه‌ای $f(x)=a\sin bx+c$ یا $f(x)=a\cos bx+c$ است. مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب و ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید.

الف)



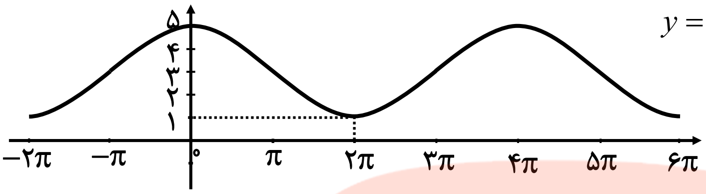
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

با توجه به نمودار ضابطه‌ی تابع به صورت زیر است:

$$y = a\sin bx + c$$

و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{2}$ و $|b| = 3$ بدست می‌آید که در آن علامت a منفی و علامت b مثبت است. بنابراین داریم: $y = -\frac{1}{2}\sin 3x$

ب)



با توجه به نمودار، ضابطه‌ی تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره‌ی تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{2}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{2}$ و بنابراین داریم: $y = 2\cos(\frac{x}{2}) + 3$.

۴- دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را بدست آورید:

الف) $y = 1 + 2\sin 7x$

$$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c \quad T=\frac{2\pi}{|b|}} T = \frac{2\pi}{|7|} = \frac{2\pi}{7} \qquad \max = |2| + 1 = 3 \qquad \min = -|2| + 1 = -1$$

ب) $\sqrt{3} - \cos\frac{\pi}{2}x$

$$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c \quad T=\frac{2\pi}{|b|}} T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4 \qquad \max = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \qquad \min = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

پ) $-\pi\sin(\frac{x}{2}) - 2$

$$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c \quad T=\frac{2\pi}{|b|}} T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi \qquad \max = |-\pi| - 2 = \pi - 2 \qquad \min = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2$$

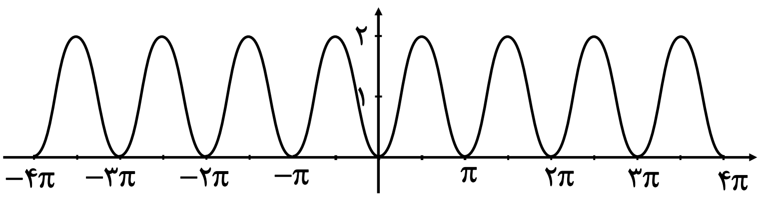
ت) $-\frac{3}{4}\cos 3x$

$$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c \quad T=\frac{2\pi}{|b|}} T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2}{3}\pi \qquad \max = |-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4} \qquad \min = -|-\frac{3}{4}| = -\frac{3}{4}$$

۵- هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

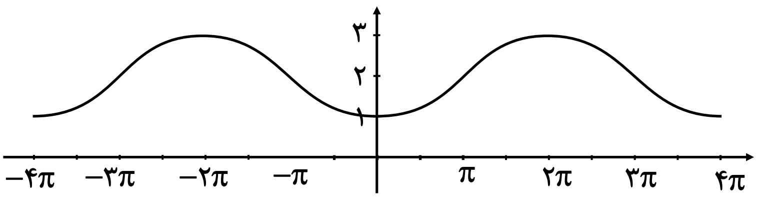
الف) $y = \sin\pi x$ ب) $y = 2 - \cos\frac{1}{2}x$ پ) $y = \sin 2x$ ت) $y = 1 - \cos 2x$

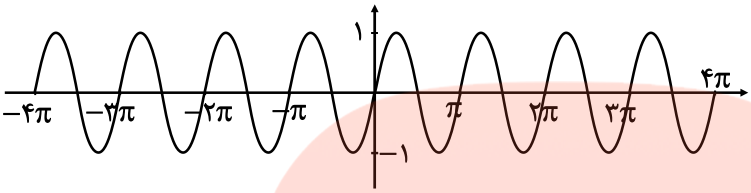
۱)

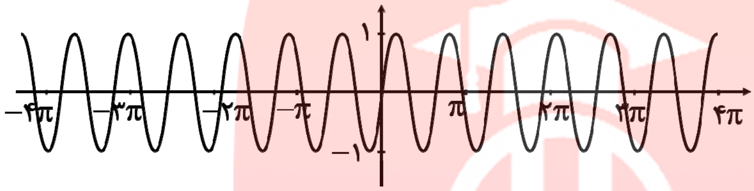


ت

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۲)  ب

۳)  الف

۴)  ث

۶- در هر مورد ضابطه‌ی تابع مثلثاتی با دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید:

الف) $T = \pi, \max = 3, \min = -3$

$y = a\sin bx + c \ , \max = |a| + c, \min = -|a| + c$

$a = \dfrac{3-(-3)}{2} = 3 \qquad c = \dfrac{3+(-3)}{2} = 0 \qquad \pi = \dfrac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = 3\sin 2x$

ب) $T = 3, \max = 9, \min = 3$

$y = a\sin bx + c \ , \max = |a| + c, \min = -|a| + c$

$a = \dfrac{9-3}{2} = 3 \qquad c = \dfrac{9+3}{2} = 6 \qquad 3 = \dfrac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = \dfrac{2}{3}\pi \Rightarrow y = 3\sin\dfrac{2\pi}{3}x + 6$

پ) $T = 4\pi, \max = -1, \min = -7$

$y = a\sin bx + c \ , \max = |a| + c, \min = -|a| + c$

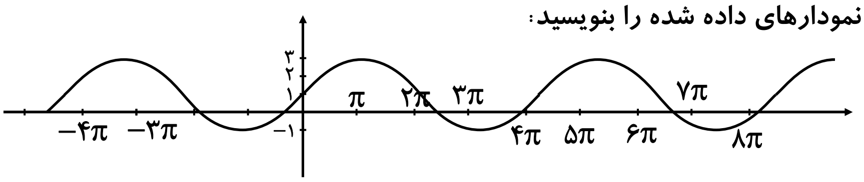
$a = \dfrac{-1-(-7)}{2} = 3 \qquad c = \dfrac{-1+(-7)}{2} = -4 \qquad 4\pi = \dfrac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 3\sin(\dfrac{1}{2}x) - 4$

ت) $T = \dfrac{\pi}{2}, \max = 1, \min = -1$

$y = a\sin bx + c \ , \max = |a| + c, \min = -|a| + c$

$a = \dfrac{1-(-1)}{2} = 1 \qquad c = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0 \qquad \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow y = \sin(4x)$

۷- ضابطه‌ی مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید:

الف) 

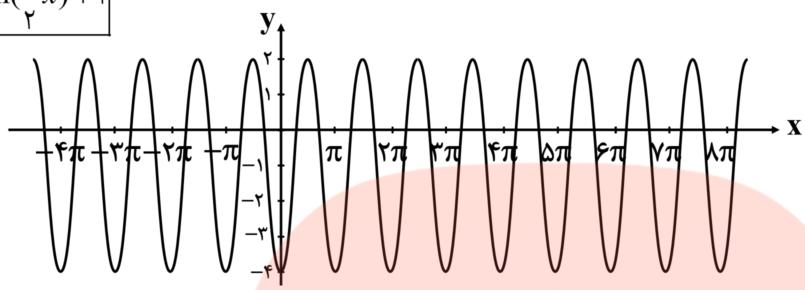
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

$\max = ۳, \min = -۱, T = ۴\pi$

$C = \frac{۳+(-۱)}{۲} = ۱, a = \frac{۳-(-۱)}{۲} = ۲, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲}$

$\boxed{y = \sin(\frac{۱}{۲}x) + ۱}$

ب)

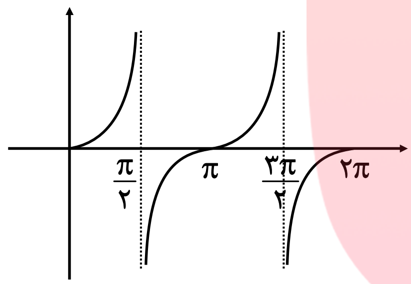


$\max = ۲, \min = -۴, T = \pi$

$C = \frac{۲+(-۴)}{۲} = -۱, a = \frac{۲-(-۴)}{۲} = ۳, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$

$\boxed{y = ۳\cos(۲x) - ۱}$

۸- صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ بررسی کنید.



تابع در دامنه‌ی خود همواره صعودی است.

۹- کدام یک از جملات زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. *نادرست*

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. *نادرست*

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیر صعودی باشد. *نادرست*

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. *درست*

۱۰- با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را باهم مقایسه کنید.

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$
sin	۰	↗	$\frac{۱}{۲}$	↗	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↗	۱
tan	۰	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↗	۱	↗	$\sqrt{۳}$	↗	$+\infty$ ت.ن

@riaziT

ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
sin	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0
tan	ت.ن	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	0

سوالات مربوط به نسبت‌های مثلثاتی 2α

۱- مقدار $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 30 = 1 - 2\sin^2 15 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15 \rightarrow \sin^2 15 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha \Rightarrow \sin 30 = 2\sin 15 \times \cos 15$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \times \cos\alpha \rightarrow \cos 15 = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

۲- فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد. حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 2 \times (\frac{5}{13})^2 - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$$

ب) $\sin 2\alpha$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (\frac{5}{13})^2$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{144}{169} \xrightarrow{\text{در ناحیه اول } \alpha} \sin\alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha - \cos\alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

۳- نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ بدست آورید.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \cos 45 = 1 - 2\sin^2(22/5) \Rightarrow \sin^2(22/5) = \frac{1-\cos 45}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2(22/5) = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin(22/5) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \rightarrow \cos 45 = 2\cos^2(22/5) - 1$$

$$\rightarrow \cos^2(22/5) = \frac{1+\cos 45}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \rightarrow \cos(22/5) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

سوالات مربوط به معادلات مثلثاتی

تیپ اول سینوس‌ها:

۱- معادله $\sin x=-\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+(-\frac{\pi}{6})=2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\\ x=2k\pi+(\pi+\frac{\pi}{6})=2k\pi+\frac{7\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

۲- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x-\sqrt{3}=0$

$$2\sin x-\sqrt{3}=0\rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sin x=\sin(\frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\\ x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{3})=2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

ب) $4\sin x+\sqrt{8}=0$

$$4\sin x+\sqrt{8}=0\rightarrow \sin x=\frac{-\sqrt{8}}{4}=\frac{-2\sqrt{2}}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\rightarrow \sin x=\sin(\frac{-\pi}{4})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+(-\frac{\pi}{4})=2k\pi-\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=2k\pi+(\pi-(-\frac{\pi}{4}))=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

۳- معادله $\sin 2x=\sin 3x$ را حل کنید.

$$\sin 2x=\sin 3x$$

$$\begin{cases}2x=2k\pi+3x\Rightarrow x=2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\\ 2x=(2k+1)\pi-3x\rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{5},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

۴- معادله $2\sin 3x-\sqrt{2}=0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x-\sqrt{2}=0\rightarrow \sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow \sin 3x=\sin(\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12},k\in\mathbb{Z}\\ 3x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}\rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\end{cases}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۵- جواب معادله $\sin x.\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را بدست آورید.

ابتدا طرفین معادله را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲\sin x.\cos x=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}\to ۲\sin x.\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to \sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to \sin ۲x=\sin(\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\to x=k\pi+\frac{\pi}{۶},k\in\mathbb{Z}\\ ۲x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۳}\to x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶},k=\mathbb{Z}\end{cases}$$

۶- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{۲}=\sin ۳x$

$$۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\to x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\quad k\in\mathbb{Z}$$

ب) $\cos ۲x-\sin x+۱=۱$

$$۱-۲\sin^۲ x-\sin x=۰\Rightarrow ۲\sin^۲ x+\sin x-۱=۰\xrightarrow{\sin x=t}۲t^۲+t-۱=۰\xrightarrow{b=a+c}\begin{cases}t=-۱\\ t=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-۱\to\sin x=\sin(\frac{-\pi}{۲})\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{-\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\to\sin x=\sin(\frac{\pi}{۶})\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\end{cases}$$

پ) $۲\sin^۲ x+\sin x-۱=۰$

$$\xrightarrow{\sin x=t}۲t^۲+t-۱=۰\xrightarrow{b=a+c}\begin{cases}t=-۱\\ t=+\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-۱\to\sin x=\sin\frac{-\pi}{۲}\to x=۲k\pi+\frac{-\pi}{۲}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\to\sin x=\sin(\frac{\pi}{۶})\to\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+(\pi-\frac{\pi}{۶})\end{cases}\end{cases}$$

ت) $\cos^۲ x-\sin x=\frac{۱}{۴}$

$$۱-\sin^۲ x-\sin x=\frac{۱}{۴}\to\sin^۲ x+\sin x-\frac{۳}{۴}=۰\xrightarrow{\sin x=t}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

$$t^2+t-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(-\frac{3}{4})=4 \Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2} \\ t_2=\frac{-1-2}{2}=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbb{Z} \\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \\ \sin x=\frac{-3}{2} \quad \text{غیر ممکن} \end{cases}$$

ث) $\sin x-\cos 2x=0$

$$\sin x-(1-2\sin^2 x)=0 \rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \rightarrow (\sin x+1)(2\sin x-1)=0$$

$$\begin{cases} \sin x+1=0 \rightarrow \sin x=-1 \rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{2} \quad k\in\mathbb{Z} \\ 2\sin x-1=0 \rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \quad k\in\mathbb{Z} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

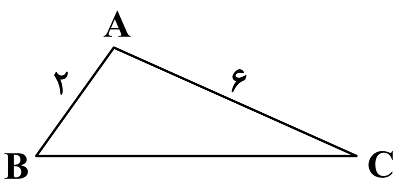
۷- یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $16\frac{m}{s}$ برای هم تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ V (برحسب ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (برحسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد. آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d=\frac{V^2\sin 2\theta}{10}$$

$$12/8=\frac{(16)^2\sin 2\theta}{10} \rightarrow \sin 2\theta=\frac{12/8\times 10}{256}=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ 2\theta=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta=k\pi+\frac{\pi}{12} \\ \theta=\frac{(2k+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{12} \end{cases}$$

۸- مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌مترمربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$S=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times \sin\hat{A}$$

$$3=\frac{1}{2}\times 2\times 6\times \sin\hat{A} \rightarrow \sin\hat{A}=\frac{1}{2} \rightarrow \sin\hat{A}=\sin\frac{\pi}{6}$$

@riaziT

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \\ \widehat{A} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فقط می‌توان $A = \frac{\pi}{2}$ و $\widehat{A} = \frac{5\pi}{6}$ را در نظر گرفت پس دو مثلث می‌توان ساخت.

تیپ دوم کسینوس‌ها:

۱- معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید:

$$\cos x.(2\cos x - 9) = 5 \to 2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = t}$$

$$2t^2 - 9t - 5 = 0 \to (2t-1)(t+5) = 0 \to \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \to \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \to x = 2k\pi \pm \frac{2x}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = -5 \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۲- معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $0 \le x \le 2\pi$ حل کنید. (ویژه ریاضی)

$$\sin x + \cos x = 1 \to \sin x = 1 - \cos x \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2 x = (1-\cos x)^2$$

$$\to \sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \to 2\cos^2 x - 2\cos x = 0$$

$$\to 2\cos x(\cos x - 1) = 0 \to \begin{cases} 2\cos x = 0 \to \cos x = 0 \to x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \cos x - 1 = 0 \to \cos x = 1 \to x = 0, 2\pi \end{cases}$$

۳- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \to \cos x = \cos(\frac{\pi}{2}) \to x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} & k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \frac{1}{2} \to \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \to x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ب) $\cos x = \cos 2x$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm 2x$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + 2x \to x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \to x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

@riaziT

مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

تیپ سوم تانژانت (ویژه رشته ریاضی)

۱- معادله $\tan x = \tan ۵x$ را حل کنید:

$$x = k\pi + ۵x \to x = \frac{k\pi}{۴} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۲- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\tan(۲x-۱) = ۰$

$$\tan(۲x-۱) = \tan(۰) \Rightarrow ۲x-۱ = k\pi \to x = \frac{k\pi+۱}{۲}$$

ب) $\tan ۳x = \tan \pi x$

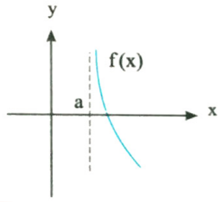
$$۳x = k\pi + \pi x \Rightarrow ۳x - \pi x = k\pi \to (۳-\pi)x = k\pi \to x = \frac{k\pi}{۳-\pi}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

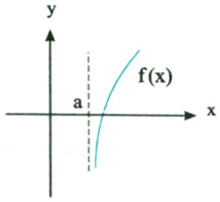
@riaziT

حدهای یک‌طرفه نامتناهی

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، در این صورت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی، بزرگ‌تر کنیم، به شرطی که x را از سمت راست به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشیم.

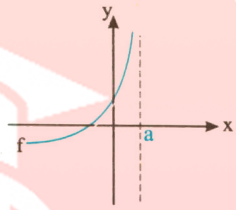


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

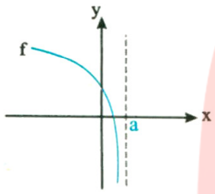


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

هم‌چنین فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، در این‌صورت $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ‌تر کنیم، به شرطی که x را به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشیم.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$، یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه، از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشیم.

مثال

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{|x|}=\frac{1}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|x|}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

قضیه(۱): اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{زوج باشد } n\\ -\infty & \text{فرد باشد } n\end{cases}$

قضیه(۲):

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ آن‌گاه، $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ آن‌گاه، $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و برعکس.

قضیه(۳): اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ باشد، آن‌گاه:

الف) اگر $L<0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ب) اگر $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

پ) اگر $L<0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ت) اگر $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

تذکر قضیهٔ (۳) در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال حدود زیر را حساب کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{1-x}{x+2}=\frac{1+2^+}{(-2)^++2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{[x]-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{[2^-]-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1-2}{2^--2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$

قضیه(۴): اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ و یا $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

مثال

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-1}{\tan x}=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{\pm\infty}=0$$

زیرا: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

قضیه (۵): اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آن‌گاه:

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$

ب) اگر $L>0$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=+\infty$

پ) اگر $L<0$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=-\infty$

نکته: قضیهٔ فوق برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

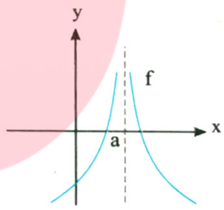
الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}\times\dfrac{x+1}{x}=1\times(+\infty)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)\dfrac{1}{x-1}=2\times(-\infty)=-\infty$

مجانب قائم: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

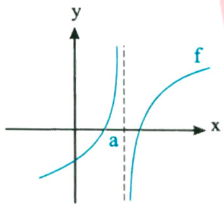
ت) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ پ) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ الف) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

توجه: در شکل‌های زیر خط $x=a$ یک مجانب قائم تابع است.



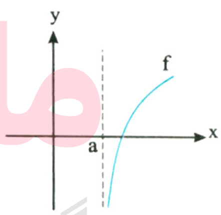
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

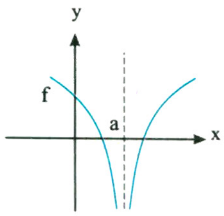


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

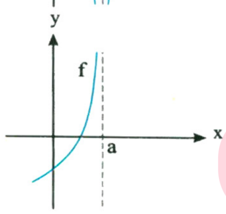


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

نکته: مجانب‌های قائم در توابع کسری اغلب در ریشهٔ مخرج اتفاق می‌افتند پس برای پیدا کردن آن‌ها کافی است ریشه‌های مخرج را بیابیم و سپس آن‌ها را بررسی نماییم.

های درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

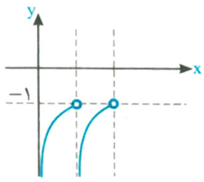
مثال نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{-x+[x]}$ در مجاورت مجانب قائم آن به کدام صورت است؟

$$f(x)=\frac{1}{-x+[x]}=\frac{1}{-(x-[x])}$$

چون ریشه‌های مخرج اعداد صحیح هستند، حول نقطهٔ $x=a$ رفتار تابع را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to a^-}\frac{1}{[x]-x}=\frac{1}{[a^-]-a}=\frac{1}{(a-1)-a}=-1$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{1}{[x]-x}=\frac{1}{a-a^+}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$



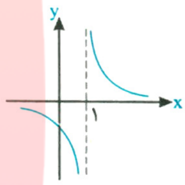
مثال مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ریشه‌های مخرج: $x^2-x-6=0\Rightarrow(x+2)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\x=3\end{cases}$

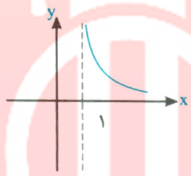
پس دو خط $x=-2$ و $x=3$ مجانب قائم تابع هستند.

نکته در توابع زیر خط $x=1$ مجانب قائم است و نمودار توابع در مجاورت مجانب قائم به شکل‌های زیر است:

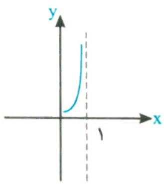
$y=\frac{1}{x-1}$



$y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$



$y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$



مثال در توابع زیر خط $x=1$ مجانب قائم نیست، چرا؟

۱) $y=\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$ ۲) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ ۳) $y=\frac{1}{[x-1]}$ ۴) $y=\frac{\left[\frac{x}{2}\right]}{x-1}$

۱) زیرا 1^+ و 1^- هیچکدام در دامنه نیستند.

۲) در تابع $y=\frac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=(1+1)=2\neq\infty$$

و بنابراین خط $x=1$ نمی‌تواند مجانب قائم باشد.

۳) زیرا در $x=1^+$ مخرج کسر صفر مطلق می‌شود و تعریف نشده است و از سمت چپ حد یک عدد حقیقی است.

۴) زیرا در همسایگی محذوف $x=1$ حاصل $\left[\frac{x}{2}\right]$ برابر صفر مطلق است و حد تابع ∞ نمی‌شود.

مثال به ازای چه مقدار از m، تابع $y=\frac{x^2+4x+3}{x^2+mx+4}$ فقط یک مجانب قائم دارد.

حالت اول: اگر ریشه مخرج مضاعف باشد، فقط یک مجانب قائم دارد.

$$\Delta=0\Rightarrow m^2-16=0\Rightarrow m=\pm4$$

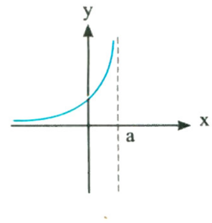
حالت دوم: صورت و مخرج، ریشهٔ مشترک داشته باشند، در این صورت پس از ساده کردن، مخرج فقط یک ریشه دارد.

$$y=\frac{(x+1)(x+3)}{x^2+mx+4}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,\ x\neq-3\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در مخرج}}1-m+4=0\Rightarrow m=5\\x=-3,\ x\neq-1\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در مخرج}}9-3m+4=0\Rightarrow m=\frac{13}{3}\end{cases}$$

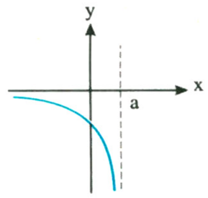
توجه کنید که در حالت دوم حواسمان باشد که ریشهٔ دیگر مخرج ۳- نباشد!

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

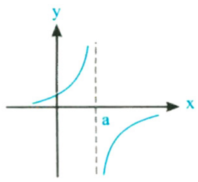
توجه به‌طور کلی، نمودار یک تابع در مجاورت مجانب قائم آن به یکی از صورت‌های زیر است:



$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

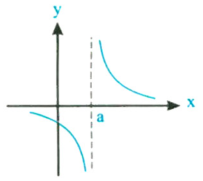


$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



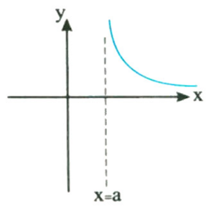
$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

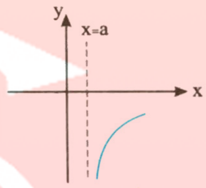


$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

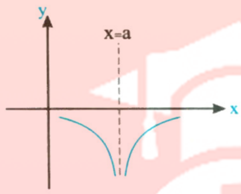
$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



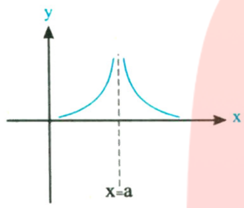
$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$



$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

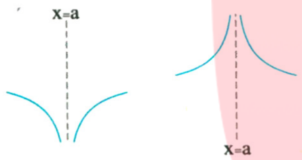


$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$



$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$

◄ اگر نمودار تابع گویای $f(x)$ در مجاورت مجانب قائم خود $(x=a)$ به یکی از صورت‌های زیر باشد، آن‌گاه $x=a$ ریشهٔ مضاعف مخرج است و $x=a$ دیگر ریشه صورت نیست.

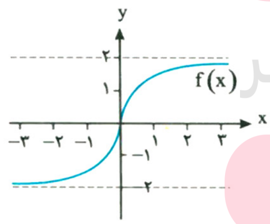


حد در بی‌نهایت

اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، برابر L است و می‌نویسیم $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از L را به هر اندازه کوچک کرد.

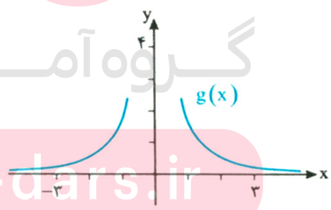
اگر تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند، برابر L است و می‌نویسیم $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی کوچک، فاصله $f(x)$ از L را به هر اندازه کوچک کرد.

مثال با استفاده از نمودارهای f و g حدود زیر را به‌دست آورید.



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$



$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$

حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

توجه به‌طور کلی حد در بی‌نهایت هر چندجمله‌ای مانند $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ برابر حد جمله با بزرگ‌ترین درجهٔ آن است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n)$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

قضیه(۶): اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$

قضیه(۷): اگر L_1 و L_2 اعداد حقیقی و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L_2$ آنگاه:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\pm g)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L_1 \pm L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f.g)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) . \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L_1 L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0)$

تذکر: توجه داشته باشید که قضیه فوق وقتی $x \to -\infty$ نیز برقرار می‌باشد.

قضیه(۸): اگر n عدد طبیعی باشد.

الف) اگر n عدد زوج باشد: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$

ب) اگر n فرد باشد: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty \end{cases}$

قضیه(۹): اگر L عددی حقیقی، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ آن‌گاه:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) \times \lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & , L>0 \\ -\infty & , L<0 \end{cases}$$

تذکر: قضیه فوق در حالتی که $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = \begin{cases} -\infty & , L>0 \\ +\infty & , L<0 \end{cases}$$

قضیه(۱۰): اگر L عددی حقیقی و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ آن‌گاه:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)\times g(x)) = \lim_{x\to-\infty} f(x) \times \lim_{x\to-\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & , L>0 \\ -\infty & , L<0 \end{cases}$$

تذکر: قضیه فوق در حالتی که $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ باز هم برقرار است.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)g(x) = \begin{cases} -\infty & , L>0 \\ +\infty & , L<0 \end{cases}$$

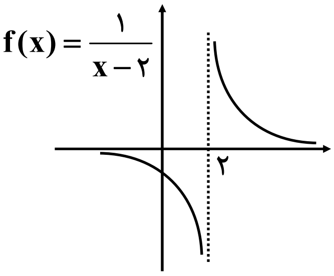
مثال: حد زیر را محاسبه کنید.

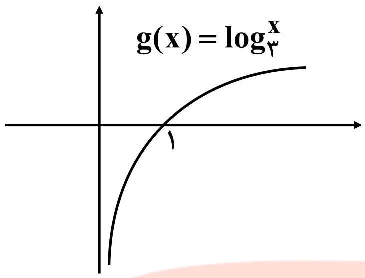
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^3+x-1}{6x^3-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^3}{6x^3} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

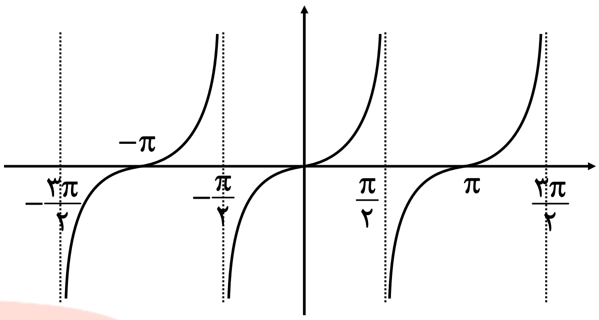
مجانب افقی: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار $y=f(x)$ می‌نامیم، به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ برقرار باشد.

های درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۱- نمودار توابع f و g و h در شکل‌های زیر داده شده‌اند، با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود بیابید.







$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$$

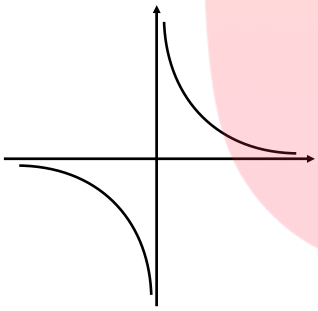
$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$$

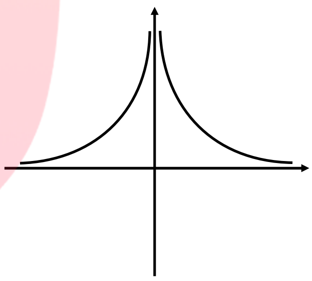
$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} h(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} h(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to(+\frac{\pi}{2})^+} \quad =-\infty$$

۲- با استفاده از نمودار توابع داده شده حدود زیر را بدست آورید.





$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=-\infty\end{cases}$$

۳- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

۱) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\sin x}=\xrightarrow[\text{می‌گیرد و } \sin x>0]{x\to 0^+ \text{، در ناحیه اول قرار}}\frac{-1}{0^+}=-\infty$

۲) $\displaystyle\lim_{x\to(-2)^+}\frac{1-x}{x+2}=\frac{1+2}{(-2)^++2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

۳) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]-2}{x-2}=\xrightarrow[{[2^-]=1}]{\text{ابتدا جزء صحیح را به عدد تبدیل کن}}\lim_{x\to 2^-}\frac{1-2}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$

۴) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

@riaziT
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۴- توابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=x+1$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} g(x)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty\\ \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}(x+1)=1\end{cases}$$

ب) تابع $f+g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x\to 0}((f+g)(x))$ را محاسبه کنید.

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{x^2}+(x+1)=\frac{1+x^3+x^2}{x^2}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+1}{x^2}=\frac{1}{(0)^2}=+\infty$$

پ) تابع $f\times g$ را به‌صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x\to 0} f(x)\times g(x)$ را محاسبه کنید.

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{x^2}\times(x+1)=\frac{x+1}{x^2}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)=\frac{1}{(0)^2}=+\infty$$

۵- حاصل حدهای زیر را بدست آورید و مشخص کنید در هر مرحله از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{1+1}{0^-}=-\infty\Rightarrow$ قضیه ۳

ب) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})=1+\infty=+\infty\Rightarrow$ قضیه ۵

پ) $\lim_{x\to -2^+}\frac{x+2}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{\cancel{x+2}}{(x+2)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{0^+}=+\infty\Rightarrow$ قضیه ۳

ت) $\lim_{x\to 0^-}\frac{2-\cos 2x}{x}=\frac{2-(1)}{0^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty\Rightarrow$ قضیه ۳

۶- با استفاده از قضایای حد نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}=+\infty \Rightarrow \frac{\lim_{x\to 0}\sqrt{3+x^2}}{\lim_{x\to 0}(x^2)}=\frac{\sqrt{3}}{0^+}=+\infty$

ب) $\lim_{x\to(-2)}\left|\frac{5-x}{2+x}\right|=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to(-2)}\frac{|5-x|}{|2x+|}$

$$\begin{cases}\lim_{x\to(-2)}|5-x|=|5-(-2)|=7\\ \lim_{x\to(-2)}|2+x|=0^+\end{cases}\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}}\lim_{x\to(-2)}\frac{|5-x|}{|2+x|}=+\infty$$

پ) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$ $\lim_{x\to 2}(1)=1$ و $\lim_{x\to 2}(x-2)^2=0^+$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}}\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$$

مای درس
گروه آموزشی مای درس
www.my-dars.ir

@riaziT

۷- حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{۲x}{x^۲-۴}=\dfrac{۴}{۰^-}=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{x^۲+۲x-۱}{x^۲+x-۱۲}=\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{x^۲+۲x-۱}{\underbrace{(x-۳)(x+۴)}_{۰^-}}=\dfrac{۱۴}{۰^-}=-\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{x+۱}{۹-x^۲}=\dfrac{۳+۱}{۹-(۹^+)}=\dfrac{۴}{۰^-}=-\infty$

سوالات مربوط به مجانب قائم

۱- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x+۱}{x^۳+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی است؟

برای یافتن مجانب قائم می‌توانیم ریشه‌های مخرج را بدست آوریم.

$$f(x)=\dfrac{x+۱}{x(x^۲+۱)}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty\end{cases}$$

۲- مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-x-۶}$ را در صورت وجود بدست آورید.

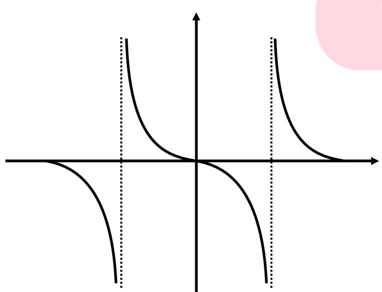
ابتدا ریشه‌های مخرج را بدست می‌آوریم.

$$x^۲-x-۶=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۲)=۰\to\begin{cases}x=۳\\x=-۲\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-x-۶}=\dfrac{۹-۹+۲}{۹-۳-۶}=\dfrac{۲}{۰}=\infty\Rightarrow$ $x=۳$ مجانب قائم است.

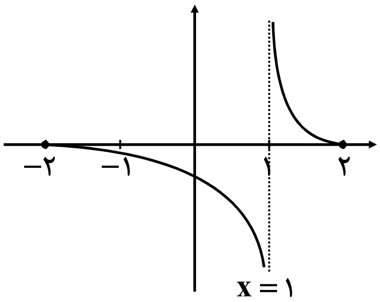
$\lim\limits_{x\to (-۲)} \dfrac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-x-۶}=\dfrac{۴+۶+۲}{۴+۲-۶}=\dfrac{۱۲}{۰}=\infty\Rightarrow$ $x=-۲$ مجانب قائم است.

۳- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.



@riaziT
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۴- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه $[-۲,۲]-\{۱\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.



۵- مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{۳-x} \Rightarrow ۳-x=۰ \to x=۳ \to \lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲x-۱}{۳-x}=\dfrac{۵}{۰}=\infty$

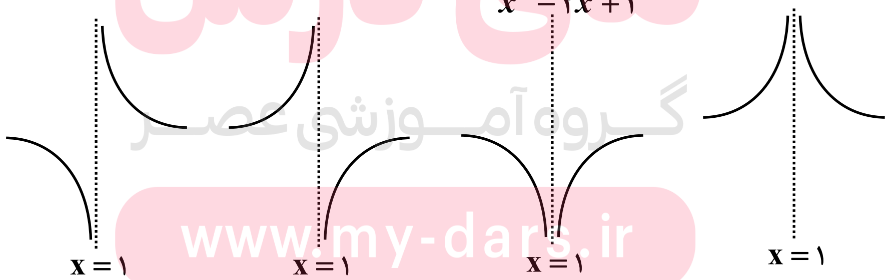
ب) $f(x)=\dfrac{x^۲+x}{x^۲-x} \Rightarrow x^۲-x=۰ \to x(x-۱)=۰ \to \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x^۲+x}{x^۲-x}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cancel{x}(x+۱)}{\cancel{x}(x-۱)}=-۱ \Rightarrow$ $x=۰$ مجانب قائم نیست.

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲+x}{x^۲-x}=\dfrac{۲}{۰}=\infty \Rightarrow$ $x=۱$ مجانب قائم است.

۶- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

۷- کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^۲-۲x+۱}$ را در همسایگی $x=۱$ نمایش می‌دهد؟



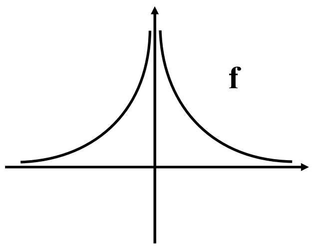
$\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x}{x^۲-۲x+۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x}{(x-۱)^۲}=\dfrac{۱}{۰^+}=+\infty$

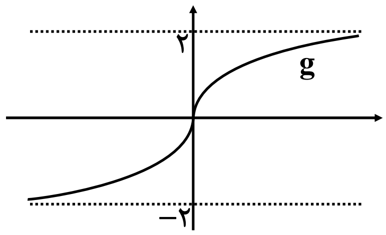
$\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{x}{x^۲-۲x+۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{x}{(x-۱)^۲}=\dfrac{۱}{۰^+}=+\infty$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

سوالات مربوط به حد در بی‌نهایت

۱- با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را بدست آورید.





$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۰$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+۲$

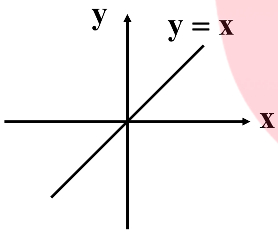
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۰$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-۲$

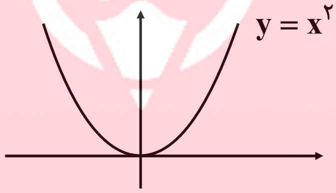
۲- مفاهیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ را بیان کنید.

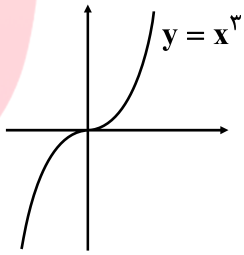
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ یعنی با کاهش مقدار x از هر عدد دلخواهی، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگتر می‌شود.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ یعنی با کاهش مقادیر x، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی، کوچکتر می‌شود.

۳- با توجه به نمودار توابع $y=x$ و $y=x^۲$، $y=x^۳$ حدود زیر را مشخص کنید.







$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^۲=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^۳=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^۳=-\infty$

۴- با استفاده از قضیه ۷ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳+\frac{۵}{x^۳})=\lim\limits_{x\to+\infty}(۳)+\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{۵}{x^۳})=۳+۰=۳$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲+\frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x}+۴}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}(۲)+\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{۳}{x^۲})}{\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{۵}{x})+\lim\limits_{x\to-\infty}(۴)}=\dfrac{۲+۰}{۰+۴}=\dfrac{۱}{۲}$

۵- الف) اگر $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+ax+a_۰$ و $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots b_۱x+b_۰$ دو چندجمله‌ای باشند، نشان دهید.

$$\lim_{x\to\pm}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm}\frac{a_n}{b_n}\cdot x^{n-m}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_۱x+a_۰)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(b_mx^n+b_{m-1}+x^{m-1}+\cdots+b_۱x+b_۰)}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}a_nx^n}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}b_mx^m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$$

@riaziT
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

ب) در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حدهای قسمت قبل به چه صورتی نوشته می‌شود؟

$$m > n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{g(x)>>f(X)} 0$$

$$m = n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{a_m}$$

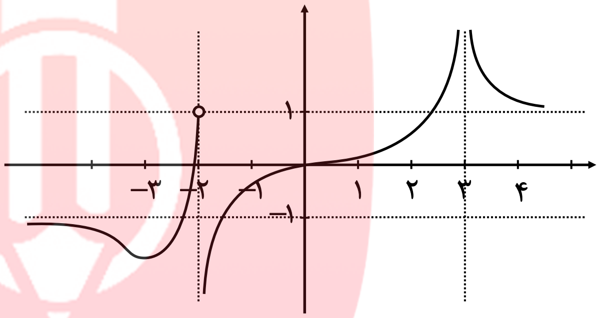
$$n > m \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{f(x)>>g(x)} \pm\infty$$

۶- مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$: هر چه مقادیر x بزرگ و بزرگتر شود، مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شود.

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$: هرچه مقادیر x کوچک و کوچکتر شود، مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود.

۷- برای تابع f که نمودار آن داده شده است، موارد زیر را بدست آورید.



۱) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +1$

۲) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

۳) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

۴) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$

۵) $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$

۸- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-7x+1}{2x^2-x+3} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{2}x = \pm\infty$

۲) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^3+x+1}{6x^3-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^3}{6x^3} = -\frac{1}{2}$

۳) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+1}{4x^3+2x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x} = 0$

۴) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x} = 3$

۵) $\lim_{x\to-\infty}\frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{t^2}{t^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{t} = 0$

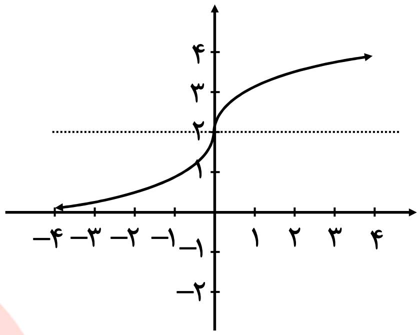
۶) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2+2x}{4x+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2}{4x} = \lim_{x\to\pm\infty}(-x) = \mp\infty$

۷) $\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$

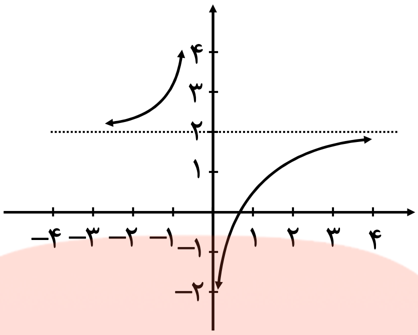
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

سوالات مربوط به مجانب افقی

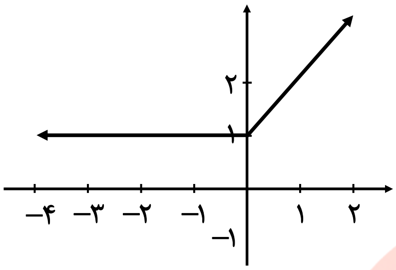
۱- کدام‌یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی است؟آن را مشخص کنید.



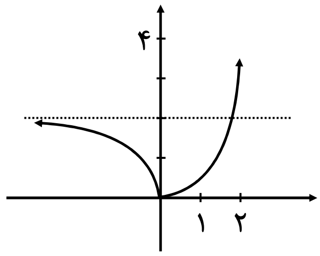
الف) مجانب افقی ندارد



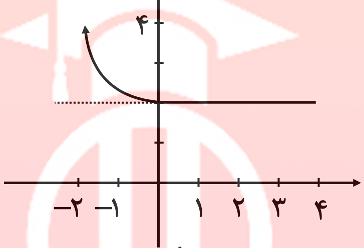
ب) $y=2$ مجانب افقی



پ) مجانب افقی ندارد



ت) $y=2$ مجانب افقی دارد.



ث) مجانب افقی ندارد.

۲- مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1} \Rightarrow y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$

ب) $g(x)=x^3 \Rightarrow y=\lim\limits_{x\to\pm} x^3=\pm\infty$ مجانب افقی ندارد.

پ) $h(x)=\frac{x^2+1}{x+1} \Rightarrow y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x+1}=\pm\infty$ مجانب افقی ندارد.

۳- مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $y=\frac{2x-1}{x-3}$ $\begin{cases} x=3 & \text{مجانب قائم} \\ x=2 & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

ب) $y=\frac{x}{x^2-4}$ $\begin{cases} x=2 \rightarrow x=-2 & \text{مجانب قائم} \\ y=0 & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

پ) $y=\frac{1+2x^2}{1-x^2}$ $\begin{cases} x=1, x=-1 & \text{مجانب قائم} \\ y=-2 & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

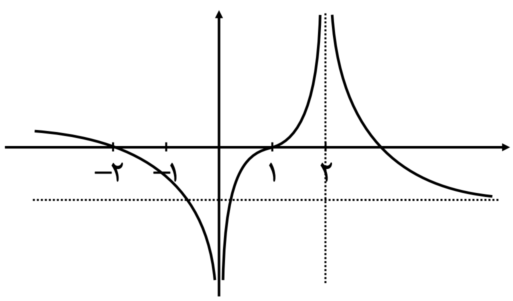
ت) $y=\frac{2x}{1+x^2}$ $\begin{cases} \text{مجانب قائم ندارد.} \\ y=0 \end{cases}$

۴- نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.

الف) $f(-1)=f(-2)=0$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

پ) خط $y=-1$ مجانب افقی آن باشد.



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a,f(a))$ به صورت زیر است:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } A = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حاصل حد بالا را مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهند.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

محاسبهٔ $f'(a)$ به روش دیگر:

با یک نامگذاری مناسب می‌توان فرمول فوق را به صورت مقابل نوشت:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱) ثابت کنید:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$a+h=x \Rightarrow h=x-a \Rightarrow \begin{cases} h\to 0 \\ x\to a \end{cases} \xRightarrow{\text{جای‌گذاری}} \lim_{h\to 0} \frac{f(\overbrace{a+h}^{x})-f(a)}{\underbrace{h}_{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

۲) معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^2+3$ را در $x=-2$ بنویسید.

$$m(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2+3-(a^2+3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{a^2}+2ah+h^2+\cancel{3}-\cancel{a^2}-\cancel{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} = 2a+0 = 2a \Rightarrow m = 2(-2) = -4$$

$$y-y_0 = m(x-x_0) \quad , \quad A\Big|_{7}^{-2}$$

$$y-7 = -4(x+2) \Rightarrow y = -4x-1$$

مشتق‌پذیری و پیوستگی

تابع f در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر است، هرگاه، یکی از دو تعریف زیر دارای حد متناهی باشند:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

قضیه (۱۱): اگر تابع f در a مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است.

نکته: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را به ترتیب با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن‌را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \quad f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad , \quad f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

نتیجه: اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ یعنی حد چپ یا راست نامتناهی داشته باشیم، در این صورت خط $x=a$ را مماس قائم بر منحنی $f(x)$ در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم، بدیهی است که $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

نکته: تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $f(x)$ در a پیوسته نباشد.

۲) $f(x)$ در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای)

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای)

پ) هر دو نامتناهی باشند.

توجه: اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با نماد $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشروط بر این‌که حد فوق موجود باشد. مجموعهٔ تمام نقاطی از دامنه f که برای آن‌ها f' موجود باشد را دامنهٔ f' می‌نامیم.

مثال: اگر $f(x)=x^3$ باشد، تابع مشتق و دامنهٔ آن را محاسبه کنید و $f'(2)$ را محاسبه کنید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2)}{\cancel{h}}=3x^2$$

که با توجه به تابع مشتق، دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}}=(4+4+4)=12$$

محاسبه مشتق برخی توابع

۱) $f(x)=c\Rightarrow f'(x)=0$

۲) $f(x)=x^n\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

۳) $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۴) $f(x)=\sqrt{ax+b}\Rightarrow f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}\ ,\ ax+b>0$

۵) $f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۶) $f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x$

۷) $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$

اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع $kf\ (k\in\mathbb{R})$ و $f\pm g$ و $f\times g$ و $\frac{f}{g}\ (g(a)\neq 0)$ نیز مشتق‌پذیر هستند.

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

مشتق توابع مرکب

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

قاعدهٔ زنجیره‌ای

اگر f تابعی برحسب u و u تابعی برحسب x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

مثال مشتق تابع $f(x) = \tan^{2} x$ را محاسبه کنید.

$$\tan x = u \Rightarrow y = u^{2}$$

$$y' = 2uu' = 2(1+\tan^{2} x)\tan x$$

مشتق‌پذیری روی یک بازه

تابع $f(x)$ روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است، هرگاه در هر نقطهٔ این بازه مشتق‌پذیر باشد.

تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست و در نقطهٔ b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ را با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده و مشتق مرتبهٔ دوم آن را به صورت $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهند.

مثال مشتق مرتبهٔ دوم تابع $f(x) = \frac{x^{2}-1}{x+1}$ را محاسبه کنید.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-1(x^{2}-1)}{(x+1)^{2}} = \frac{\cancel{2x^{2}}+2x-\cancel{x^{2}}+1}{(x+1)^{2}} = \frac{x^{2}+2x+1}{(x+1)^{2}}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^{2}-2(x+1)(x^{2}+2x+1)}{(x+1)^{4}}$$

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

به‌طور کلی، آهنگ متوسط تغییر یک تابع در بازه‌ای مانند $(a, a+h)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازهٔ } [a, a+h]$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در } x=a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

نکته آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق (شیب خط مماس) در آن نقطه متناظرند.

مثال سنگریزه‌ای در آب استخری می‌اندازیم؛ در نتیجه دایره‌هایی به شعاع $r = 5$ ایجاد می‌شود، در لحظه‌ای که شعاع دایره با آهنگ ۰/۲ تغییر می‌کند، مساحت دایره با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

$$S = \pi r^{2} \Rightarrow S' = 2\pi r \times r' = 2\pi(5)(0/2) = 10\pi(0/2) = 2\pi$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

تمرین‌های فصل چهارم: مشتق

تیپ اول: تعریف حدی مشتق

۱- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^{۲} + ۳$ را در نقطه‌ای به طول (-۲) بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(\alpha, f(\alpha))$ به صورت زیر است:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(\alpha)$$

$$f(-۲) = (-۲)^{۲}+۳ = ۷\ ,\ f(-۲+h) = (-۲+h)^{۲}+۳ = ۴-۴h+h^{۲}+۳ = ۷-۴h+h^{۲}$$

$$f'(-۲) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{۷-۴h+h^{۲}-۷}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{-۴h+h^{۲}}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(-۴+h)}{\cancel{h}} = -۴$$

۲- اگر $f(x) = x^{۲}$، $f'(۳)$ را به دو روش به دست آورید.

پاسخ: روش اول:

$$f(۳) = ۹$$

$$f'(۳) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{(h+۳)^{۲}-۹}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{h^{۲}+۶h+۹-۹}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(h+۶)}{\cancel{h}} = ۶$$

روش دوم: می‌دانیم $f'(\alpha) = \lim_{x\to \alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

$$f'(۳) = \lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{x-۳} = \lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳}(x+۳) = ۶$$

۳- برای تابع $f(x) = -x^{۲}+۱۰x$، $f'(۸)$ را به دو روش حساب کنید.

روش اول:

$$f(۸) = -(۸)^{۲}+۱۰(۸) = -۶۴+۸۰ = ۱۶$$

$$f'(۸) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(۸+h)-f(۸)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{-(۸+h)^{۲}+۱۰(۸+h)-۱۶}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{-(۶۴+h^{۲}+۱۶h)+۸۰+۱۰h-۱۶}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{-h^{۲}-۶h}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{-\cancel{h}(h+۶)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to ۰}(-(h+۶)) = -۶$$

روش دوم:

$$f'(۸) = \lim_{x\to ۸}\frac{f(x)-f(۸)}{x-۸} = \lim_{x\to ۸}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۱۶}{x-۸} = \lim_{x\to ۸}\frac{-\cancel{(x-۸)}(x-۲)}{\cancel{x-۸}} = -۶$$

۴- اگر $f(x) = ۳x^{۲}-۲x+۱$، $f'(۲)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

پاسخ: ابتدا شیب خط مماس را به کمک فرمول حدی مشتق به دست می‌آوریم:

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} \xrightarrow{f(۲)=۹} \lim_{x\to ۲}\frac{۳x^{۲}-۲x+۱-۹}{x-۲}$$

$$= \lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(۳x+۴)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}(۳x+۴) = ۱۰$$

$$\begin{cases}(۲,۹)\\ m=۱۰\end{cases} \Rightarrow y-۹ = ۱۰(x-۲) \Rightarrow y = ۱۰x-۱۱ \quad \text{معادله خط مماس}$$

ما‌ی درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۵- اگر $f(x)=x^3-2$، $f'(-1)$ را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

پاسخ:

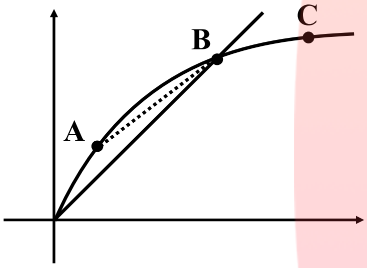
$$f(-1)=(-1)^3-2=-3$$

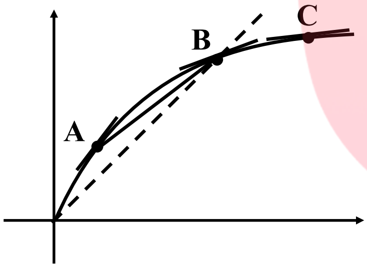
$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2-(-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

تیپ دوم: محاسبه شیب از روی نمودار

۶- برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده‌شده از (الف) تا (ج) را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.





الف) شیب نمودار در نقطه A: پاسخ: m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B: پاسخ: m_2

پ) شیب نمودار در نقطه C: پاسخ: m_3

ت) شیب خط AB: پاسخ: m_4

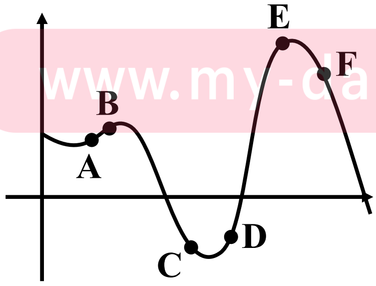
ث) شیب خط $y=2$: پاسخ: $m_5=0$

ج) شیب خط $y=x$: پاسخ: $m_6=1$

با توجه به نمودار شیب در نقطه A بیشتر از سایر نقاط می‌باشد و ترتیب قرارگیری به صورت زیر است:

$$m_1>m_6>m_4>m_2>m_3>m_5$$

۷- نقاط داده‌شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه‌شده در جدول نظیر کنید.

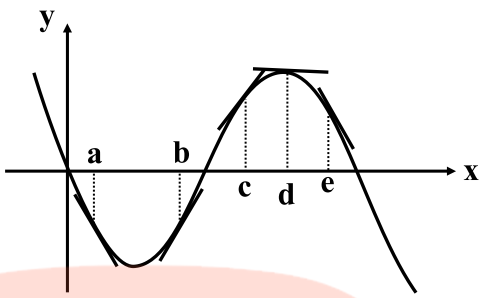


نقطه	شیب
F	-3
C	-1
E	0
A	$\frac{1}{2}$
B	1
D	2

پاسخ: با توجه به نمودار شیب در نقطه D از شیب در نقطه B تند است پس عدد ۲ را برای D انتخاب می‌کنیم. همچنین در نقطه F با سرعت بیشتری نسبت به نقطه C در حال نزول هستیم.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۸- با در نظر گرفتن نمودار F در شکل زیر، نقاط به طول‌های a، b، c، d و e را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵
e	−۲

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم خط مماس در نقطه d موازی محور xهاست پس مشتق در آن نقطه برابر صفر است و شیب خط مماس در نقطه c تندتر از شیب در نقطه b می‌باشد و هم‌چنین در نقطه e با شیب تندتری در حال نزول هستیم.

۹- نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید. به طوری که:

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن نقطه منفی است.

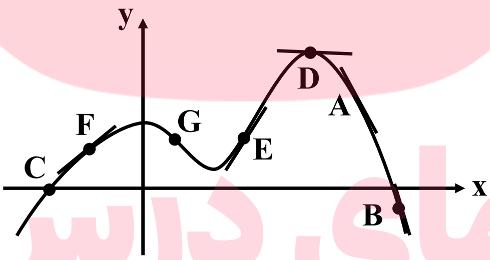
پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا صفر است ولی مقدار مشتق در آن نقطه مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن‌جا صفر است.

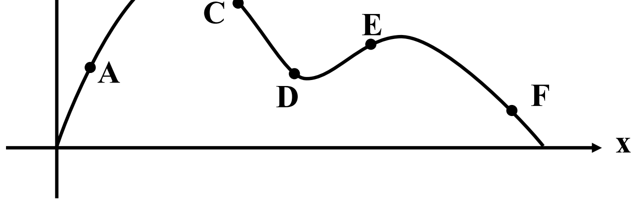
ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی نمودار هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

پاسخ:



۱۰- نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه نقاط مثبت است.

پاسخ: نادرست ـ (شیب در نقطه C، D و F منفی است.

ب) $m_A < m_B$

پاسخ: نادرست ـ (شیب در نقطه A از نقطه B تندتر است.)

پ) $m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

ت) شیب منفی در نقاط F، D و C منفی است.

پاسخ: درست

ث) $m_F < m_D < m_C$

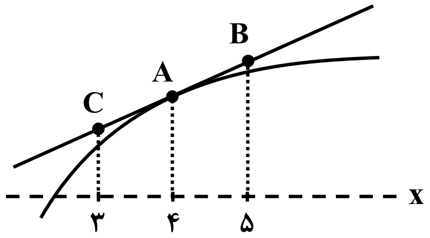
پاسخ: (شیب در نقطه D کندتر از نقطه C است.)

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

@riaziT

۱۱- برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(۴)=۱/۵$, $f(۴)=۲۵$ ، با توجه به شکل مختصات نقاط A، B و C را بیابید.



پاسخ: با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم شیب خطی که از نقاط A، B و C عبور می‌کند برابر است. مشتق در نقطه $x=۴$ یعنی $f'(۴)$.

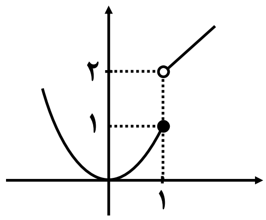
$$m=f'(۴)=۱/۵=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow\frac{y_B-۲۵}{۵-۴}=۱/۵\rightarrow y_B=۲۶/۵\rightarrow B(۵,۲۶/۵)$$

$$۱/۵=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}\Rightarrow\frac{۲۵-y_C}{۴-۳}=۱/۵\rightarrow y_C=۲۳/۵\rightarrow C=(۳,۲۳/۵)$$

تیپ سوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

۱۲- تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x)=\begin{cases}x^۲ & x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. چرا $g'(۱)$ موجود نیست.

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که حدهای چپ و راست تابع در نقطه $x=۱$ با هم برابر نیستند. پس تابع پیوسته نیست و مشتق هم ندارد.



۱۳- نشان دهید مشتق تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ در نقطه $x=-۱$ موجود نیست.

پاسخ:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-(-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{|x^۲-۱|}{x+۱}$$

حد راست : $\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲-۱}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{\cancel{(x+۱)}(x-۱)}{\cancel{x+۱}}=\lim_{x\to(-۱)^+}(x-۱)=-۲$

حد چپ : $\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}-(x-۱)=+۲$

مشاهده می‌کنیم مشتق‌های چپ و راست با هم برابر نیستند پس $f'(-۱)$ موجود نیست.

۱۳- مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

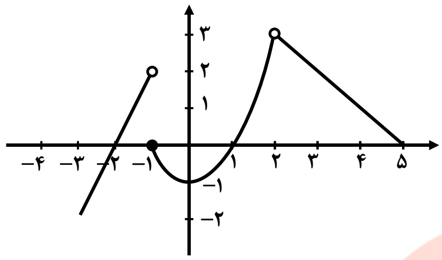
پاسخ: تابع f روی بازه $[a,b)$ مشتق‌پذیر است. هرگاه f روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.
تابع f روی بازه $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & -۲\le x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. چرا تابع f در بازه $[۱,۲]$ مشتق‌پذیر نیست؟

پاسخ: زیرا با این‌که روی بازه $(۱,۲)$ مشتق‌پذیر است، اما در $x=۱$ پیوستگی راست ندارد. (حد راست با مقدار تابع برابر نیست)، پس در $x=۱$ مشتق راست ندارد.

@riaziT

۱۵- اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیر f را روی بازه‌های $[-۱,۱]$، $(۲,۵)$ و $[-۲,۰]$ بررسی کنید.

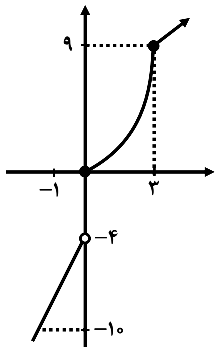


پاسخ: تابع در بازه $[-۲,۰]$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا در $x=-۱$ ناپیوسته است.
تابع در بازه‌ی $(۲,۵)$ مشتق‌پذیر است.
تابع در بازه $[-۱,۱]$ مشتق‌پذیر است.

۱۶- تابع $f(x)=\begin{cases} ۵x-۴ & x<۰ \\ x^۲ & ۰\le x\le ۳ \\ x+۶ & x>۳ \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

پاسخ:



ب) نشان دهید که $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند.

پاسخ:

$$f(۰)=۰$$
$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}x=۰$$
$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{۵x-۴-۰}{x-۰}=\frac{-۴}{۰^-}=+\infty$$
$\Rightarrow$ *پیوسته نیست*

$$f(۳)=۹$$
$$f'_+(۳)=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x+۶-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x-۳}{x-۳}=۱$$
$$f'_-(۳)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}(x+۳)=۶$$
$\Rightarrow$ *مشتق چپ و راست با هم برابر نیست*

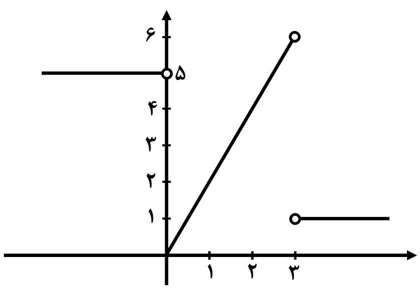
پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم در $x=۰$ و $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(x)=\begin{cases} ۵ & x<۰ \\ ۲x & ۰<x<۳ \\ ۱ & x>۳ \end{cases}$$

ت) نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

پاسخ:



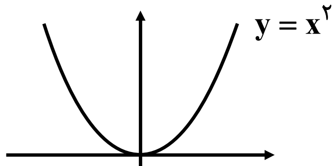
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۱۷- **نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:**

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

پاسخ:

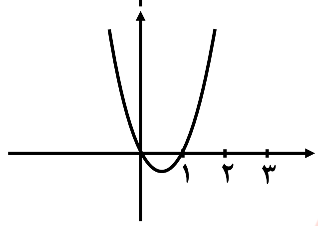
$y = x^{۲}$



ب) در $x = ۲$ برابر ۳ شود.

پاسخ:

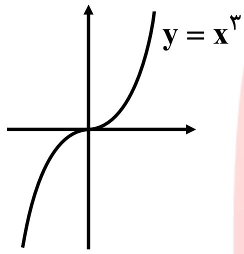
$$f(x) = x^{۲} - x$$
$$f'(x) = ۲x - ۱$$
$$f'(۲) = ۲(۲) - ۱ = ۳$$



پ) در تمام نقاط مثبت شود.

پاسخ:

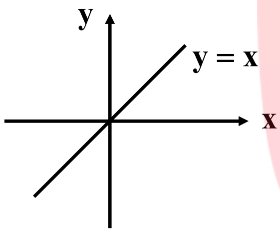
$y = x^{۳}$



ت) در تمام نقاط یکسان شود.

پاسخ:

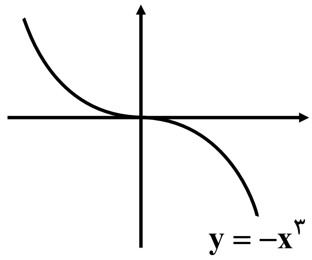
$y = x$



ث) در تمام نقاط منفی شود.

پاسخ:

$y = -x^{۳}$



۱۸- **مشتق‌پذیری تابع** $f(x)\begin{cases} x^{۲}+۳ & x \geq ۱ \\ ۲x & x < ۱ \end{cases}$ **را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.**

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x^{۲}+۳) = ۴$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (۲x) = ۲$$

حد چپ و راست در نقطه $x = ۱$ برابر نیست. پس پیوسته نیست و مشتق هم در $x = ۱$ ندارد.

۱۹- **اگر $f(x) = |x^{۲} - ۴|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیر f را در نقطه $x = -۲$ بررسی کنید.**

پاسخ:

$$f'_+(-۲) = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{-(x^{۲}-۴)-۰}{x+۲} = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{-(x-۲)(x+۲)}{x+۲} = \lim_{x\to(-۲)^-} -(x-۲) = +۴$$

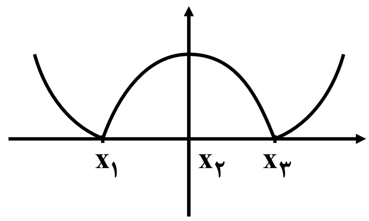
$$f'_-(-۲) = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x^{۲}-۴)-۰}{x+۲} = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x-۲)(x+۲)}{x+۲} = -۴$$

مشاهده می‌کنیم مشتق چپ و راست با هم برابر نیست پس تابع f در $x = -۲$ مشتق ندارد.

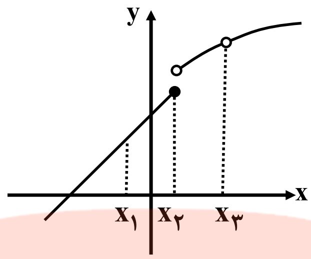
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۲۰- در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص‌شده، مشتق‌پذیر نیست.

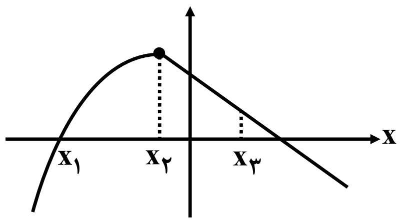
پاسخ:



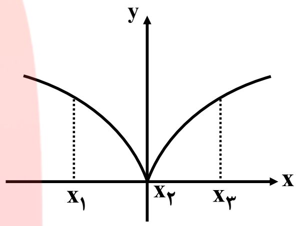
در x_1 و x_3 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط گوشه‌ای



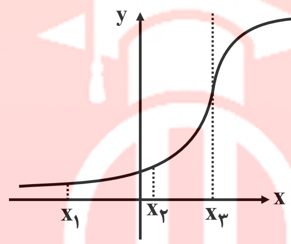
در x_2 و x_3 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط ناپیوسته



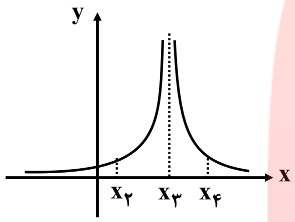
در x_2 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط گوشه



در x_2 مشتق‌پذیر نیست.
مشتق نامتناهی



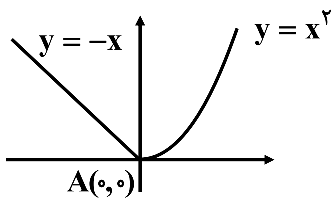
در x_3 مشتق‌پذیر نیست.
(مشتق نامتناهی)



در x_3 مشتق‌پذیر نیست.
(نقطه ناپیوستگی)

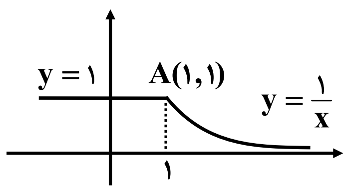
۲۱- با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده‌شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیرنیستند.

پاسخ:



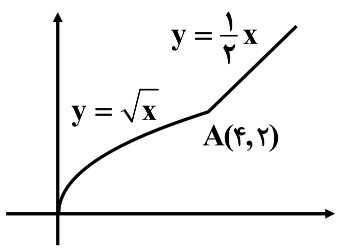
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(0)=0 \\ f'_-(0)=-1 \end{cases} \qquad f'_+(0)\neq f'_-(0)$$



$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\geq 1 \\ 1 & x<1 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x>1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$$

$$f'_+(1)=-1 \ , \ f'_-(1)-0 \rightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1)$$



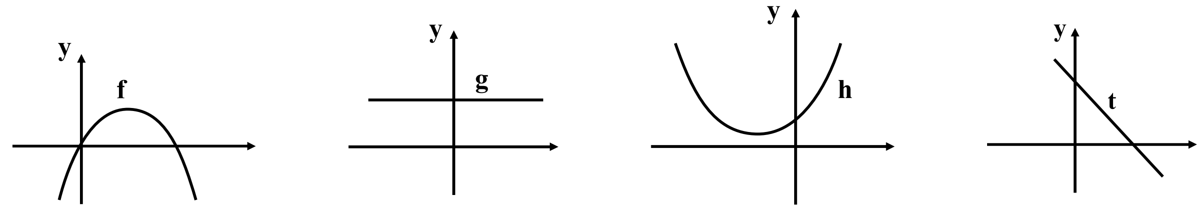
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & x\geq 4 \\ \sqrt{x} & x<4 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & x>4 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x<4 \end{cases}$$

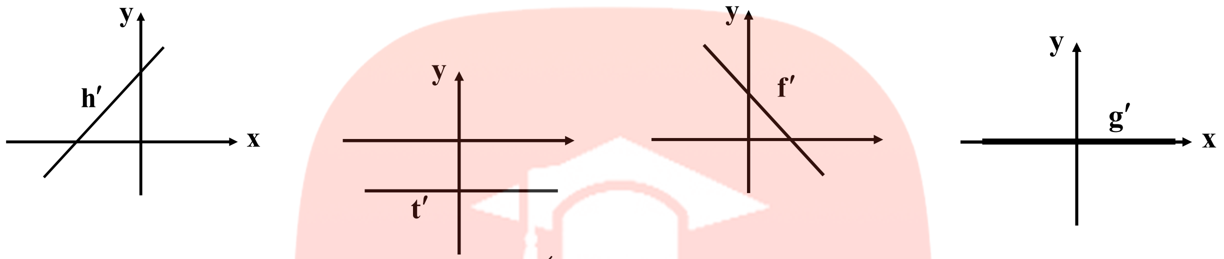
$$f'_+(4)=\frac{1}{2} \ , \ f'_-(4)=\frac{1}{4} \rightarrow f'_+(4)\neq f'_-(4)$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۲۲- نمودار توابع f ،g ،h و t را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.

پاسخ:





۱) اگر نمودار تابع اصلی صعودی باشد، نمودار مشتق آن بالای محور x ها قرار می‌گیرد.

۲) اگر نمودار تابع اصلی نزولی باشد، نمودار مشتق آن پایین محور x ها قرار می‌گیرد.

۳) اگر نمودار تابع اصلی قله یا دره داشته باشد، در نمودار مشتق، آن نقاط محل برخورد با محور x ها می‌شود.

تیپ چهارم: محاسبه مشتق توابع

۲۳- مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $f(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1$

$$f'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$$

۲) $f(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2)$

$$f'(x)=(6x^2)(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$$

۳) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{3x+1}$

$$f'(x)=\frac{(2x)(3x+1)-(3)(x^2-4)}{(3x+1)^2}=\frac{3x^2+2x+12}{(3x+1)^2}$$

۴) $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$

$$f'(x)=\frac{0(x-4)-(1)(1)}{(x-4)^2}=\frac{-1}{(x-4)^2}$$

۵) $f(x)=\left(\dfrac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$

$$f'(x)=8\left(\frac{-3(x^2+5)-(2x)(-3x-1)}{(x^2+5)^2}\right)\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^7$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۶) $f(x)=\dfrac{x}{۲x^۲+x-۱}$

$$f'(x)=\frac{(۱)(۲x^۲+x-۱)-(۴x+۱)(x)}{(۲x^۲+x-۱)^۲}$$

۷) $f(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۲$

$$f'(x)=(۶x)(۲x-۵)^۲+(۳x^۲-۴)(۲(۲)(۲x-۵)^۱)=(۲x-۵)(۲۴x^۲-۳۰x-۱۶)$$

۸) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱)$

$$f'(x)=(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}})(x^۳+۱)+(\sqrt{۳x+۲})(۳x^۲)$$

۹) $f(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۱}{-۳x+۲}$

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^۲-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^۲}=\frac{-۳x^۲+۴x-۳}{(-۳x+۲)^۲}$$

۱۰) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{۹(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^۲}$$

۲۴- اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۵$ و $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$(f.g)'(۲)=f'(۲)g(۲)+f(۲).g'(۲)=۵\times۸+۳\times(-۶)=۴۰-۱۸=۲۲$$

$$(\frac{f}{g})'(۲)=\frac{f'(۲).g(۲)-g'(۲).f(۲)}{(g(۲))^۲}=\frac{۵\times۸-۳\times(-۶)}{۸^۲}=\frac{۴۰+۱۸}{۶۴}=\frac{۲۹}{۳۲}$$

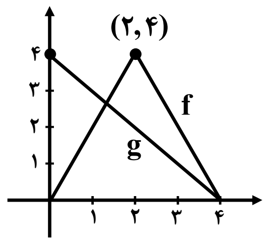
۲۵- اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$.

پاسخ:

$$(f+g)'(۱)=f'(۱)+g'(۱)=۳+۵=۸$$

$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۳(۳)+۲(۵)=۹+۱۰=۱۹$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT



۲۶- نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x)-g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

پاسخ:

ابتدا ضابطه توابع f و g را می‌نویسیم:

ضابطه تابع f برای بازه‌ی $[۲,۴]$: $mf=\dfrac{۰-۴}{۴-۲}=-۲=f'(x)\ ,\ y-۰=(-۲)(x-۴)\Rightarrow y=-۲x+۸$

ضابطه تابع f برای بازه‌ی $[۰,۲]$: $mf=\dfrac{۴-۰}{۲-۰}=۲=f'(x)\Rightarrow y-۰=۲(x-۰)\Rightarrow y=۲x$

ضابطه تابع g: $mg=\dfrac{۰-۴}{۴-۰}=-۱\rightarrow y-۰=(-۱)(x-۴)\Rightarrow y=-x+۴$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-۲x+۸ & ۲\le x\le ۴\\ ۲x & ۰\le x\le ۲\end{cases}\ ,\ g(x)=-x+۴$$

$f(۱)=۲\qquad f'(۱)=۲\qquad g(۱)=۳\qquad g'(۱)=-۱$

$f(۲)=۴\qquad f'_+(۲)=-۲\ ,\ f'_-(۲)=۲\qquad g(۲)=۲\qquad g'(۲)=-۱$

$f(۳)=۲\qquad f'(۳)=-۲\qquad g(۳)=۱\qquad g'(۳)=-۱$

$$h'(۱)=f'(۱).g(۱)+f(۱).g'(۱)=۲\times۳+(-۱)\times۲=۴$$

$$h'(۲)=\begin{cases}f'_+(۲).g(۲)+f(۲).g'(۲)=(-۲)\times۲+۴(-۱)=-۸\\ f'_-(۲).g(۲)+f(۲).g'(۲)=۲\times۲+۴(-۱)=۰\end{cases}$$
در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست

$$h'(۳)=f'(۳).g(۳)+f(۳).g'(۳)=(-۲)\times۱+۲(-۱)=-۴$$

$$k'(۱)=\frac{f'(۱).g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}=\frac{۲\times۳-۲\times(-۱)}{۳^۲}=\frac{۸}{۹}$$

$$k'_+(۲)=\frac{f'_+(۲).g(۲)-g'(۲)f(۲)}{g^۲(۲)}=\frac{-۲\times۲-۴(-۱)}{۲^۲}=\frac{۰}{۴}=۰$$
در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

$$k'_-(۲)=\frac{f'_-(۲).g(۲)-g'(۲).f(۲)}{g^۲(۲)}=\frac{۲\times۲-۴(-۱)}{۴}=۲$$

$$k'(۳)=\frac{f'(۳).g(۳)-g'(۳).f(۳)}{g^۲(۳)}=\frac{-۲\times۱-۲\times(-۱)}{۱^۲}=۰$$

ما‌ی درس
گروه آموزشی مصر
www.my-dars.ir
@riaziT

تیپ پنجم: آهنگ تغییر

۲۷- با توجه به تابع رشد $(f(x)=\text{۷}\sqrt{x}+\text{۵۰})$ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) آهنگ متوسط رشد، در بازه زمانی $[\text{۰},\text{۲۵}]$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$\begin{aligned}f(\text{۲۵})&=\text{۷}\sqrt{\text{۲۵}}+\text{۵۰}=\text{۸۵}\\ f(\text{۰})&=\text{۷}(\sqrt{\text{۰}})+\text{۵۰}=\text{۵۰}\end{aligned}\Rightarrow\frac{f(\text{۲۵})-f(\text{۰})}{\text{۲۵}-\text{۰}}=\frac{\text{۸۵}-\text{۵۰}}{\text{۲۵}}=\frac{\text{۳۵}}{\text{۲۵}}=\text{۱/۴}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پاسخ: برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای باید از تابع مشتق بگیریم:

$$f'(x)=\text{۷}\times\frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{x}}=\frac{\text{۷}}{\text{۲}\sqrt{x}}\Rightarrow f'(\text{۲۵})=\frac{\text{۷}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲۵}}}=\frac{\text{۷}}{\text{۱۰}}\ ,\ f'(\text{۴۹})=\frac{\text{۷}}{\text{۲}\sqrt{\text{۴۹}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}=\frac{\text{۵}}{\text{۱۰}}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=\text{۲۵}$ بیشتر است.

۲۸- ارتفاع یک جسم از سطح زمین از معادله $h(t)=-\text{۵}t^{\text{۲}}+\text{۴۰}t$ به دست می‌آید.

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا زمان برخورد به زمین را به دست می‌آوریم:

$$h(t)=\text{۰}\Rightarrow-\text{۵}t^{\text{۲}}+\text{۴۰}t=\text{۰}\Rightarrow-\text{۵}t(t-\text{۸})=\text{۰}\Rightarrow\begin{cases}t=\text{۰}\\ t=\text{۸}\end{cases}$$

برای به دست آوردن معادله سرعت، کافی است از معادله $h(t)$ نسبت به t مشتق بگیریم:

$$V_{(t)}=-\text{۱۰}t+\text{۴۰}\Rightarrow\begin{cases}V(\text{۰})=-\text{۱۰}(\text{۰})+\text{۴۰}=\text{۴۰}\\ V(\text{۸})=-\text{۱۰}(\text{۸})+\text{۴۰}=-\text{۴۰}\end{cases}$$

ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم $\text{۳۵}\frac{m}{s}$ و $-\text{۳۵}\frac{m}{s}$ است.

پاسخ:

$$V=-\text{۱۰}t+\text{۴۰}\Rightarrow\begin{cases}-\text{۱۰}t+\text{۴۰}=\text{۳۵}\to-\text{۱۰}t=-\text{۵}\to t=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\\ -\text{۱۰}t+\text{۴۰}=-\text{۳۵}\to-\text{۱۰}t=-\text{۷۵}\to t=\text{۷/۵}\end{cases}$$

۲۹- جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۲	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

پاسخ:

$$T(\text{۸})=\text{۱۱}\ ,\ T(\text{۱۲})=\text{۱۹}\Rightarrow\frac{\text{۱۹}-\text{۱۱}}{\text{۱۲}-\text{۸}}=\frac{\text{۸}}{\text{۴}}=\text{۲}$$

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

پاسخ:

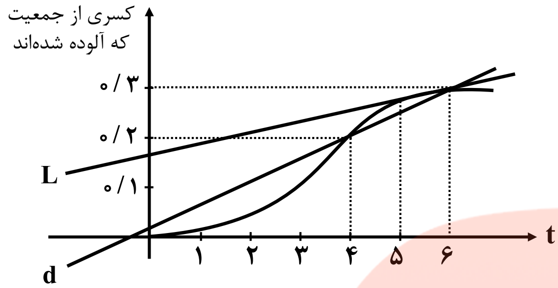
$$T(\text{۱۲})=\text{۱۹}\ ,\ T(\text{۱۸})=\text{۹}\to\frac{\text{۹}-\text{۱۹}}{\text{۱۸}-\text{۱۲}}=-\text{۱/۷}$$

مشاهده می‌کنیم از ساعت ۸ تا ۱۲ به طور متوسط هوا گرم‌تر می‌شود. از ساعت ۱۲ تا ۱۸ به طور متوسط هوا سردتر می‌شود.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۳۰- کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط L و d چه چیزی را نشان می‌دهند؟



پاسخ: در هفته سوم آهنگ آلوده شدن از هفته ششم بیشتر است. یعنی هر چه زمان بیشتر گذشته شود، جمعیت کم‌تری از شهر آلوده شدند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=۱$ و $t=۲$ یا $t=۳$ بیشتر است؟

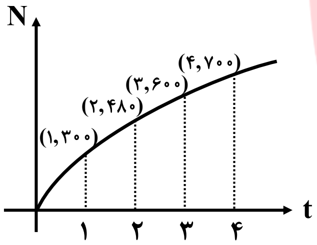
پاسخ: در $t=۳$ شیب خط مماس بیشتر است.

پ) قسمت (ب) را برای $t=۴$، $t=۵$ و $t=۶$ بررسی کنید.

پاسخ: در $t=۶$ از همه کم‌تر است.

۳۱- نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از ضرب t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از صفر تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.



پاسخ:

$$\frac{N(۱)-N(۰)}{۱-۰}=\frac{۳۰۰-۰}{۱}=۳۰۰\ ,\quad \frac{N(۲)-N(۱)}{۲-۱}=\frac{۴۸۰-۳۰۰}{۱}=۱۸۰$$

$$\frac{N(۳)-N(۲)}{۳-۲}=\frac{۶۰۰-۴۸۰}{۱}=۱۲\ ,\quad \frac{N(۴)-N(۳)}{۴-۳}=\frac{۷۰۰-۶۰۰}{۱}=۱۰۰$$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

پاسخ: چون شب مماس‌ها کم می‌شود. (چون آهنگ لحظه‌ای در حال کاهش است) (تقعر روی به پایین است.)

۳۲- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^۲-t+۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰,۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰,۵]$ با هم برابرند؟

پاسخ:

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=۱۰ \\ f(۵)=۵^۲-۵+۱۰=۳۰ \end{cases} \Rightarrow \text{سرعت متوسط}=\frac{۳۰-۱۰}{۵-۰}=۴$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای}: f'(t)=۲t-۱ \Rightarrow \text{سرعت متوسط} = \text{سرعت لحظه‌ای}$$

$$۲t-۱=۴ \rightarrow t=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

@riaziT
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.mydars.ir

۳۳- توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است. براساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

t ثانیه	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ m متر	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

الف) ۱/۲۳

ب) ۱۴/۹۱

پ) ۱۱/۵

ت) ۱۶/۰۳

پاسخ: برای این‌که سرعت توپ را در $t=0/4$ به دست آوریم می‌توانیم میانگین سرعت متوسط را در بازه‌های $[0/3,0/4]$ و $[0/4,0/5]$ به دست آوریم.

$$1)\ \frac{f(0/5)-f(0/4)}{0/5-0/4}=\frac{17/4-16/3}{0/1}=\frac{1/1}{0/1}=11$$

$$2)\ \frac{f(0/4)-f(0/3)}{0/4-0/3}=\frac{16/3-15/1}{0/1}=\frac{1/2}{0/1}=12$$

$$\text{میانگین}=\frac{11+12}{2}=11/5$$

۳۴- کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0,1]$ همیشه کم‌تر از شیب منحنی در نقطه است.

پاسخ: نادرست است. زیرا تابع $y=x^3$ و از $(0,0)$ و $(1,1)$ می‌گذرد.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}: f'(x)=3x^2 \rightarrow f(0)=0$$

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پاسخ: نادرست است. تابعی مانند $y=\sqrt{x}$ تابعی صعودی است و آهنگ تغییر متوسطش همواره نزولی است. (تقعرش رو به پایین است.)

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f(\alpha)=0$ و $f'(\alpha)=0$

پاسخ: نادرست است. تابع $y=x^3$ در نظر بگیرید.

$$f(0)=0$$

$$f'(x)=3x^2 \rightarrow f'(0)=0$$

۳۵- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3\le t\le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

پاسخ:

$$\left.\begin{aligned}m(4)&=\sqrt{4}+2\times4^3=130\\ m(3)&=\sqrt{3}+2\times3^3=55/7\end{aligned}\right\}\Rightarrow 130-55/7=74/3$$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \rightarrow m'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}+6(3)^2=\frac{1}{2\sqrt{3}}+54$$

@riaziT
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۳۶- گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه $t=۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲$ به دست می‌آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[۰,۱]$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$V(۰)=۴۰(۱-\frac{۰}{۱۰۰})^۲=۴۰ \quad , \quad V(۱)=۴۰(۱-\frac{۱}{۱۰۰})^۲=۳۹/۲۰۴ \Rightarrow \bar{V}=\frac{۳۹/۲۰۴-۴۰}{۱-۰}=-۰/۷۹۶$$

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۱۰۰]$ می‌شود؟

پاسخ:

$$V'=۴۰\times ۲(۱-\frac{t}{۱۰۰})\times(-\frac{۱}{۱۰۰})=\frac{-۸}{۱۰}(۱-\frac{t}{۱۰۰})$$

$$\begin{cases} V(۰)=۴۰ \\ V(۱۰۰)=۴۰\times(۱-\frac{۱۰۰}{۱۰۰})^۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \bar{V}=\frac{۰-۴۰}{۱۰۰-۰}=-\frac{۴}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{-۸}{۱۰}+\frac{۰/۸t}{۱۰۰}=-\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow \frac{۸t}{۱۰۰۰}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow t=۵۰$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

@riaziT

اگر $f(x)$ یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطه c) باشد که:

الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \le f(c)$ در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \ge f(c)$ در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

قضیه(۱۲): اگر تابع f در بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه تابع در این بازه هم مقدار ماکزیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

قضیه(۱۳): فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و بر بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

الف) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b) مقدار $f'(x) > 0$ آن‌گاه تابع f بر $[a,b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b) مقدار $f'(x) < 0$ آن‌گاه تابع f بر $[a,b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b) مقدار $f'(x) = 0$ آن‌گاه تابع f بر $[a,b]$ یک تابع ثابت است.

توجه: اکسترمم‌های مطلق تابعی مانند $f(x)$ در نقاطی وجود دارد که سه ویژگی زیر را داشته باشند:

۱. نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها وجود ندارد.

۲. نقاطی که مشتق در آن‌ها برابر صفر است.

۳. نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ موردنظر.

نقطه بحرانی

فرض کنید $c \in D_f$ در این صورت نقطه به طول c را یک نقطه بحرانی تابع f گویند هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

نتیجه: ۱) مجموعهٔ حاصل از نقاط (۱) و (۲) را نقاط بحرانی تابع گویند.

۲) از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار در آن‌ها اتفاق می‌افتد، نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار ماکزیمم مطلق تابع است. (البته اگر تابع پیوسته باشد.)

۳) در بین نقاط مذکور، نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد، نقاط مینیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار مینیمم مطلق تابع است.

آزمون مشتق اوّل

فرض کنیم تابع $f(x)$ بر بازه‌ای مانند I $(I \subseteq D_f)$ پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد، هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطهٔ c مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c) مقدار $f'(x) > 0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(c) < 0$ در این‌صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x) < 0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x) > 0$ آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی است.

پ) اگر f' در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد، به طوری‌که f' در هر دو طرف c مثبت یا در هر دو طرف آن منفی باشد، آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

مثال با استفاده از آزمون مشتق اول، مقادیر اکسترمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{\sin^2 x}$ را روی بازه $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ پیدا کنید.

$x\neq 0$ ، $f'(x)=\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}$، به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ (که در بازه $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ است) $f'(x)=0$ پس $x=\frac{\pi}{2}$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f است و $x=0$ ریشهٔ مخرج کسر $f'(x)$ است، پس $f'(0)$ موجود نیست و $x=0$ نقطهٔ بحرانی f است که در بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ است و به ازای هر x از بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$، $f'(x)<0$ و برای هر x از بازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$، $f'(x)>0$ پس طبق آزمون مشتق اول، $f(0)=0$ یک مقدار مینیمم موضعی است و چون به ازای هر x از بازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$، $f'(x)>0$ و برای هر x از بازهٔ $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$، $f'(x)<0$ بنابر آزمون مشتق اول، $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ یک مقدار ماکسیمم موضعی تابع f است.

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن

قضیه (۱۴): فرض کنید $f''(x)$ به ازای هر نقطه مانند x از بازهٔ باز I موجود باشد.

الف) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x)>0$، آن‌گاه نمودار f روی بازهٔ I تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x)<0$، آن‌گاه نمودار f روی بازهٔ I تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x)=0$، آن‌گاه آزمون بی‌نتیجه است.

نقطهٔ عطف: فرض کنید تابع f در نقطهٔ c پیوسته است، در این صورت نقطهٔ $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشد:

۱) نمودار f در نقطهٔ $(c,f(c))$ خط مماس داشته باشد. (در واقع مشتق چپ و راست برابر داشته باشد.)

۲) جهت تعقر f در نقطهٔ $(c,f(c))$ تغییر کند.

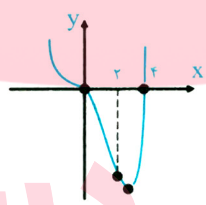
مثال جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=x^4-4x^3$ را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقاط عطف آن را به‌دست آورید.

$f'(x)=4x^3-12x^2$

$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)=0$

$\Rightarrow x=0 \ , \ x=2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f''	+	0	−	0	+
جهت تقعر f	رو به بالا		رو به پایین		رو به بالا

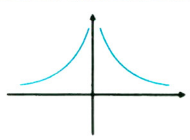


$f'(0)=m=$ شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=0$ $=0$

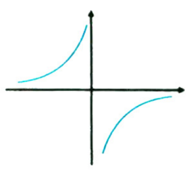
$f'(2)=m=$ شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=2$ $=-16$

چون در نقاط $(0,0)$ و $(2,-16)$ خط‌های مماس وجود دارد و جهت تقعر عوض می‌شود؛ لذا $(0,0)$ و $(2,-16)$ نقاط عطف تابع هستند.

مثال نمودار تابع f به شکل مقابل است، نمودار تابع f' را رسم کنید.



چون نمودار تابع f در هر دو طرف محور yها دارای تقعر روبه بالا است، پس نمودار f' در هر دو طرف محور yها باید صعودی باشد، در نتیجه:



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

نکاتی دربارهٔ نمودار تابع هموگرافیک: تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq 0$ ، $ad-bc\neq 0$ است را، تابع هموگرافیک می‌نامیم.

نکته: در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

دامنه تابع: $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

مجانب قائم: $y\to\pm\infty : x=-\frac{d}{c}$

مجانب افقی: $x\to\pm\infty : y=\frac{a}{c}$

نمودار تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است و نقطهٔ عطف ندارد.

مرکز تقارن نمودار: $\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$

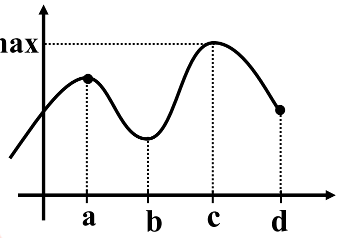
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

@riaziT

فصل ۵ کاربرد مشتق ریاضی

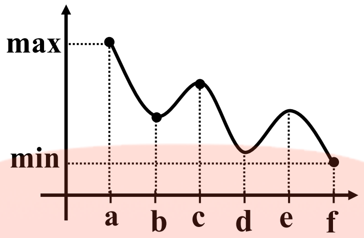
۱- در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و هم‌چنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

پاسخ:



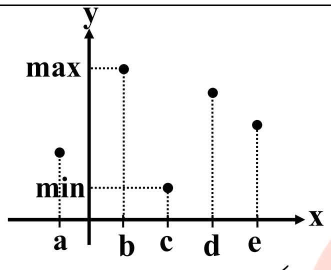
$x=c$ ماکزیمم مطلق

مینیمم مطلق ندارد.



$x=a$ ماکزیمم مطلق

$x=f$ مینیمم مطلق

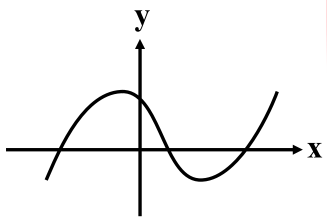


$x=b$ ماکزیمم مطلق

$x=c$ مینیمم مطلق

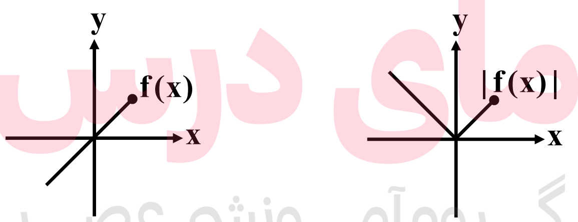
۲- نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

پاسخ:



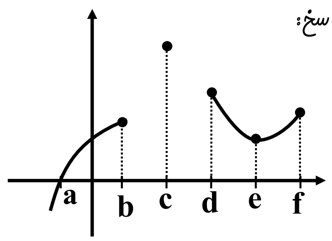
۳- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

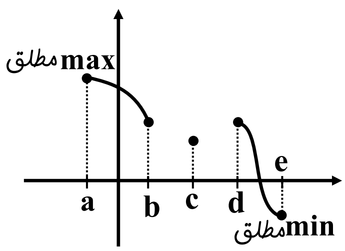
پاسخ:

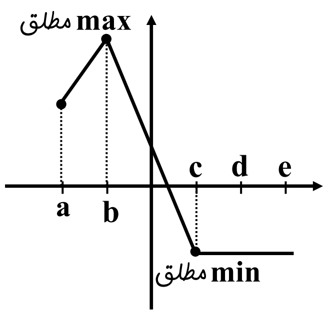


۴- دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است. اما ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست. حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص کنید.

پاسخ:





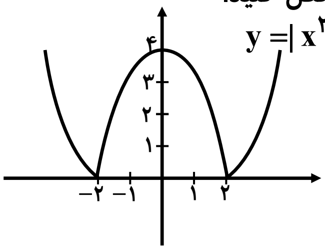


در $x=c$ ماکزیمم نسبی ندارد ولی ماکزیمم مطلق دارد.

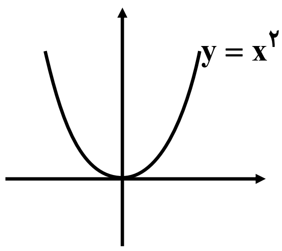
در $x=e$ مینیمم نسبی دارد ولی در کل تابع مینیمم مطلق ندارد.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

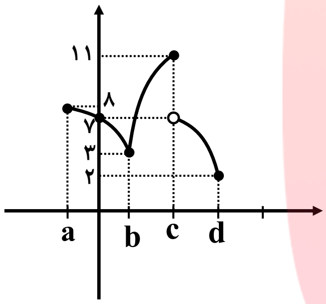
۵- در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص کنید.



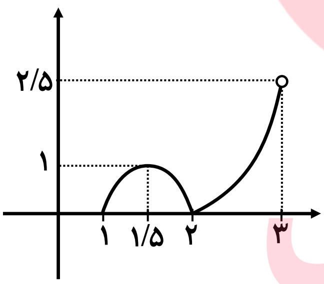
پاسخ: تابع max مطلق ندارد.
در $x = 0$، max نسبی دارد که مقدار آن برابر ۴ است.
در $x = 2$، $x = -2$، min نسبی و مطلق دارد.
که مقدار آن‌ها برابر صفر است.



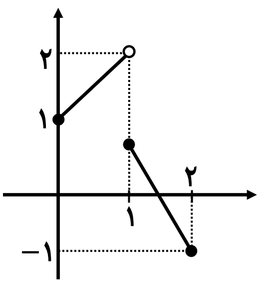
در $x = 0$ مینیمم مطلق و مینیمم نسبی دارد و مقدار آن برابر صفر است.
تابع max مطلق ندارد.



در $x = b$ مینیممی نسبی دارد که مقدار آن برابر ۳ است.
در $x = c$ ماکزیمم مطلق و نسبی دارد و مقدار آن برابر ۱۱ است.
در $x = d$ مینیمم مطلق دارد و مقدار آن برابر ۲ است.



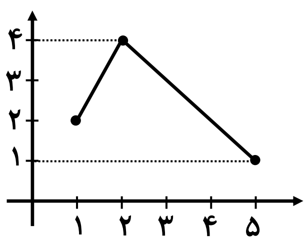
تابع در $x = 1$ و $x = 2$ مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر صفر است.
در $x = 1/5$ ماکزیمم نسبی دارد و مقدار آن برابر ۱ است.
در $x = 2$ مینیمم نسبی دارد و مقدار آن برابر صفر است.
تابع ماکزیمم مطلق ندارد.



تابع ماکزیمم مطلق و نسبی ندارد.
در $x = 2$ مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر (-1) است.

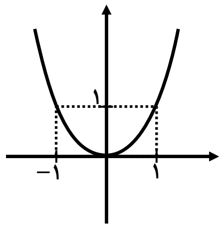
۶- نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطه (۲,۴) ماکزیمم نسبی و در نقطه (۵,۱) مینیمم مطلق دارد.

پاسخ:



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۷- تابع $f(x)=x^{۲}$ را در نظر بگیرید.



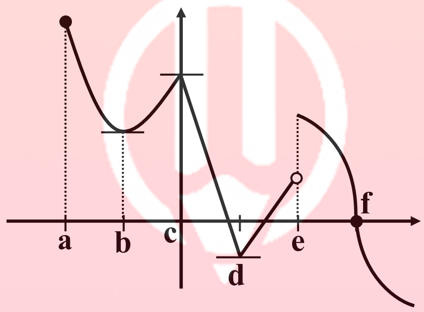
الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[۰,۱]$ و $(۰,۱)$ بررسی کنید.

پاسخ: در بازه $[۰,۱]$، مینیمم مطلق تابع برابر صفر و ماکزیمم مطلق آن برابر ۱ است.
اما در بازه $(۰,۱)$، مینیمم و ماکزیمم مطلق ندارد.

ب) وجود اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ بررسی نمایید.

پاسخ: در نقطه $(۰,۰)$ دارای مینیمم مطلق است ولی ماکزیمم مطلق ندارد.

۸- نمودار تابعی را رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.
۱) نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن نقطه برابر صفر باشد.
۲) نقطه مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.
۳) نقطه ماکزیمم مطلق تابع نقطه بحرانی نباشد.
۴) نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.
۵) نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.



۹- نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده‌شده در صورت وجود بیابد و نقاط بحرانی این توابع را به دست آورید.

الف) $f(x):۳x^{۲}-۲x+۵ \quad [-۲,۱]$

پاسخ:

$f'(x)=۶x-۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۶x-۲=۰ \to x=\frac{۱}{۳}$ نقطه بحرانی

		$\frac{۱}{۳}$	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(\frac{۱}{۳})=۳(\frac{۱}{۳})^{۲}-۲(\frac{۱}{۳})+۵=\frac{۱۴}{۳}$ مینیمم نسبی

$$\left.\begin{array}{l} f(-۲):۳(-۲)^{۲}-۲(-۲)+۵=۲۱ \\ f(\frac{۱}{۳})=\frac{۱۴}{۳} \\ f(۱)=۳(۱)^{۲}-۲(۱)+۵=۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \max_{\text{مطلق}}=(-۲,۲۱) \\ \min_{\text{مطلق}}=(\frac{۱}{۲},\frac{۱۴}{۳}) \end{array}$$

ب) $f(x)=x^{۳}-۳x \quad [-۱,۲]$

پاسخ:

$f'(x):۳x^{۲}-۳ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^{۲}-۳=۰ \to x^{۲}=۱ \Rightarrow x=\pm۱$ نقاط بحرانی

@riaziT

		-1		$+1$	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)=2 \xrightarrow{\text{max نسبی}} (-1,2)$

$f(1)=1-3=-2 \xrightarrow{\text{min نسبی}} (1,-2)$

$f(-1)=2 \rightarrow$ مطلق $\max=(-1,2)$

$f(1)=-2 \rightarrow$ مطلق $\min=(1,-2)$

$f(2)=2^3-3(2)=2 \rightarrow$ مطلق $\max=(2,2)$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<2\\ 4-x & x\ge 2\end{cases}$

پاسخ:

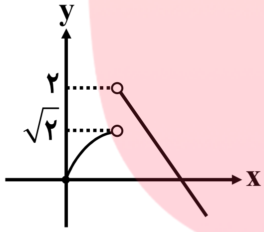
$x=2 \rightarrow$ نقطه ناپیوستگی $\Rightarrow$ نقطه بحرانی

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x<2\\ -1 & x>2\end{cases} \xrightarrow{x=0}$

	0		2	
f'		$+$		$-$
f		$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow (2,2)$ ماکزیمم نسبی

نمودار تابع $\Rightarrow$



۱۰- ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^3+ax+b$ طوری پیدا کنید که در نقطه $(1,2)$، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

پاسخ: چون نقطه $(1,2)$ عضو تابع $f(x)$ است، پس $f(1)=2$

هم‌چنین چون نقطه $(1,2)$، ماکزیمم نسبی تابع است پس $f'(1)=0$ می‌باشد.

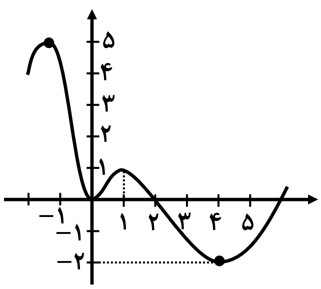
$f(1)=2 \rightarrow 1+a+b=2 \rightarrow a+b=1$

$f'(x): 3x^2+a \xrightarrow{f'(1)=0} 3+a=0 \rightarrow \boxed{a=-3}$

$\xrightarrow{a+b=1} -3+b=1 \rightarrow \boxed{b=4}$

۱۱- نمودار تابعی مانند f را به گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند. $f(0)=0$, $f(4)=-2$, $f(-1)=5$ ، نقطه $(1,1)$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

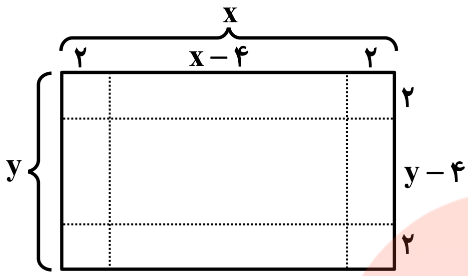
پاسخ:



www.my-dars.ir
@riaziT

۱۲- یک برگه کاغذی مستطیل‌شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $x.y = ۱۰۰cm^۲$ و $h = ۲cm$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار شود.

پاسخ:



$$\Rightarrow x, y = ۱۰۰ \Rightarrow y = \frac{۱۰۰}{x}$$

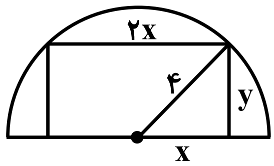
$$\text{حجم} \Rightarrow V = ۲\times(x-۴)(y-۴) = ۲xy - ۸x - ۸y + ۳۲$$

$$\xrightarrow[y=\frac{۱}{x}]{xy=۱۰۰} V = ۲۳۲ - ۸x - \frac{۸۰۰}{x} \Rightarrow V'(x) = -۸ + \frac{۸۰۰}{x^۲}$$

$$\xrightarrow{V'(x)=۰} \frac{۸۰۰}{x^۲} = ۸ \rightarrow x^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰ \Rightarrow y = ۱۰$$

۱۳- یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار باشد.

پاسخ:



$$x^۲ + y^۲ = ۴^۲ \Rightarrow y^۲ = ۴^۲ - x^۲ \Rightarrow y = \sqrt{۱۶ - x^۲}$$

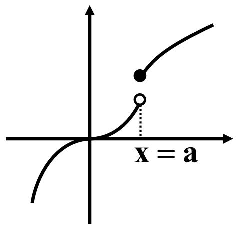
$$S = ۲x.y = ۲x\sqrt{۱۶-x^۲} \Rightarrow S' = ۲\sqrt{۱۶-x^۲} + ۲x \times \frac{-۲x}{۲\sqrt{۱۶-x^۲}}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{۲(۱۶-x^۲) - ۲x^۲}{۲\sqrt{۱۶-x^۲}} = \frac{۳۲ - ۴x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ = ۳۲ \rightarrow x^۲ = ۸ \Rightarrow x = \sqrt{۸} \Rightarrow y = \sqrt{۸}$$

۱۴- توابع $f(x) = \begin{cases} ۲x & x \ge ۱ \\ x & x < ۱ \end{cases}$ و $g(x) = x^۳$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیداند.

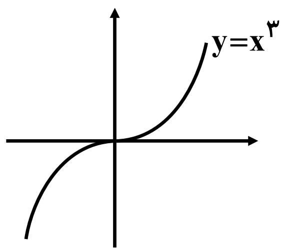
الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟

پاسخ: خیر ـ زیرا ممکن است تابع دارای ناپیوستگی باشد. نمودار روبه‌رو بیانگر یک تابع اکیداً صعودی است ولی در نقطه $x = a$ مشتق ندارد.



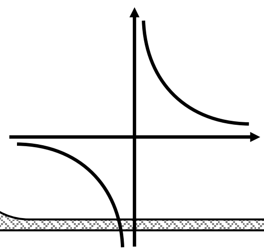
ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

پاسخ: بله ـ تابع $y = x^۳$، صعودی اکیداً است و مشتق در هر نقطه از آن مثبت است.



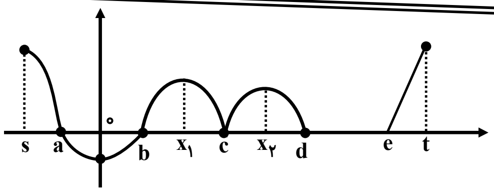
۱۵- آیا می‌توان گفت تابع $y = \frac{۱}{x}$ در تمام دامنه خود نزولی اکید است؟

پاسخ: خیر ـ با توجه به نمودار تابع در می‌یابیم که تابع در $x = ۰$ مجانب قائم دارد پس دارای جهش می‌باشد پس در تمام دامنه‌اش نزولی اکید نیست ولی در بازه‌های $(-\infty, ۰)$ و $(۰, +\infty)$ نزولی اکید است.



@riaziT

۱۶- نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است.



می دانیم در بازه‌هایی که نمودار f' بالای محور x هاست نمودار تابع f صعودی است.

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s,t]$ بررسی کنید.

پاسخ: تابع در بازه‌های (s,a) و (b,t) صعودی و در بازه‌ی (a,b) نزولی و هم‌چنین در بازه (d,e) نزولی می‌باشد.

ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

پاسخ: کافی است جدول تعیین‌علامت تابع f' را به دست آوریم.

	s	a	b	c	d	e
f'	$+$	$-$	$+$	$+$	صفر	$+$
f	↗	↘	↗	↗	↗	

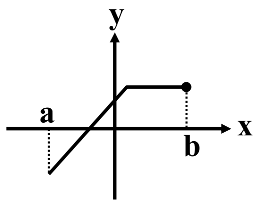
در $x=a$ ماکزیمم نسبی دارد.

در نقاط $x=a,b,c,d,e$ بحرانی هستند زیرا مشتق در این نقاط برابر صفر است و در $x=b$ مینیمم نسبی است.

۱۷- برای هر یک از موارد زیر، یک نمودار رسم کنید.

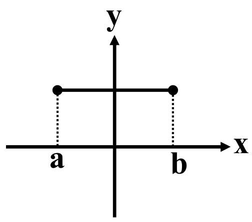
الف) تابع f در بازه‌ای مانند $[a,b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.

پاسخ:



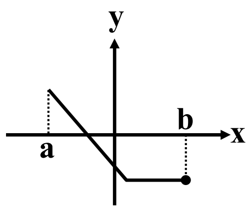
ب) تابع f در بازه‌ای مانند $[a,b]$ هم صعودی و هم نزولی است.

پاسخ: نکته: توابع ثابت هم صعودی هستند و هم نزولی.



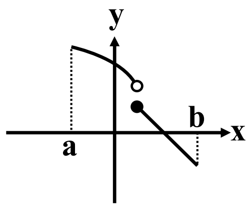
پ) تابع f در بازه‌ای مانند $[a,b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.

پاسخ:



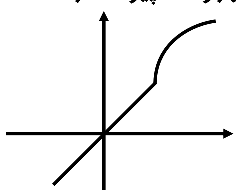
ت) تابعی که در یک بازه نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه ناپیوسته است.

پاسخ:



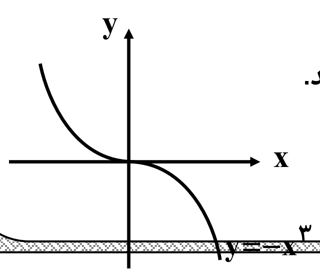
ث) تابعی مانند f در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن پیوسته باشد اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نباشد.

پاسخ:



ج) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.

پاسخ:



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۱۸- توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $y = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$

پاسخ:

$$y' = ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ \xrightarrow{y'=۰} ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases}$$

تابع در بازه‌های $(-\infty, -۱)$ و $(۲, +\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-۱, ۲)$ نزولی

x		-۱		۲	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ب) $f(x) = \dfrac{x}{x-۲} \Rightarrow Df = R - \{۲\}$

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{(۱)(x-۲) - (۱)(x)}{(x-۲)^۲} = \frac{-۲}{(x-۲)^۲} \Rightarrow$$

x		۲	
f'	$-$		$-$
f	$\searrow$		$\searrow$

تابع در $\mathbb{R} - \{۲\}$ (در تمام نقاط دامنه) نزولی می‌باشد.

جهت تقعر نمودار و نقطه عطف آن

۱۹- موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه .... (صعودی) است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... (افزایش) می‌یابد و تقعر تابع f در آن بازه رو به .... (بالا) است.

ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه .... (نزولی) است ولذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... (کاهش) می‌یابد و تقعر تابع f در آن بازه رو به .... (پایین) است.

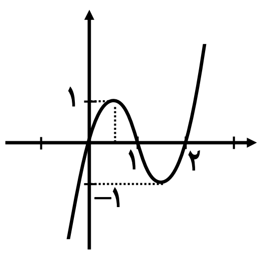
۲۰- نمودار تابع $f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید.

$f(۰) = f(۱) = f(۲) = ۰$

بر بازه $(-\infty, ۱)$, $f''(x) < ۰$

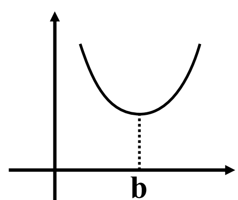
بر بازه $(۱, +\infty)$, $f''(x) > ۰$

پاسخ:

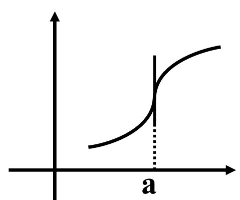


۲۱- در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.

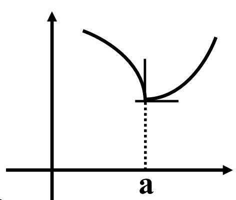
پاسخ:



نقطه عطف ندارد



عطف



عطف نیست

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۲۲- کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.

پاسخ: درست است.

ب) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است.

پاسخ: نادرست است. در تابع $f(x)=x^{۴}$، $f''(a)=۰$ می‌شود ولی چون جهت تقعر عوض نمی‌شود پس نقطه عطف است.

ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته با شد.

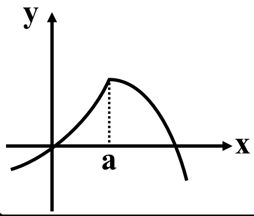
پاسخ: درست است.

ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

پاسخ: نادرست است. تابع $y=x^{۳}$ تابع اکید صعودی است و در $x=۰$ نقطه عطف دارد.

۲۳- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه عطف نباشد.

پاسخ:



۲۴- جهت تقعر توابع زیر را در دامنه آن‌ها بررسی کرده و نقطه عطف آن‌ها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۳x+۴$

پاسخ:

$f'(x)=x^{۲}-۳ \Rightarrow f''(x)=۲x \Rightarrow$

		۰	
f''	$-$		$+$
f	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا

$x=۰$ نقطه عطف است.

ب) $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ $\quad Df=\mathbb{R}-\{۱\}$

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{۱(x-۱)-(۱)(x+۱)}{(x-۱)^{۲}}=\frac{-۲}{(x-۱)^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۰+۴(x-۱)}{(x-۴)^{۴}}=\frac{۴}{(x-۱)^{۳}} \Rightarrow$$

		۱	
f''	$-$		$+$
f	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا

$x=۱$ نقطه عطف نیست.

پ) $f(x)=\sqrt[۳]{x+۱}$

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^{۲}}} \Rightarrow f''(x)=\frac{۰-۳\times\frac{۲}{۳\sqrt{x+۱}}}{(۳\sqrt[۳]{(x+۱)^{۲}})^{۲}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-۲}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^{۵}}} \Rightarrow$$

		-۱	
f''	$+$		$-$
f	تقعر رو به بالا		تقعر رو به پایین

$x=-۱$ نقطه عطف است.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

۲۵- برای هر مورد یک تابع درجه ۳ مثال بزنید که نقاط داده‌شده، نقطه عطف آن باشد.

الف) نقطه $(0,0)$ پاسخ: $y=x^3$

ب) نقطه $(1,0)$ پاسخ: $y=(x-1)^3$

پ) نقطه $(0,1)$ پاسخ: $y=(x^3+1)$

ت) نقطه $(2,2)$ پاسخ: $y=(x-2)^3+2$

۲۶- مقادیر a، b و c در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

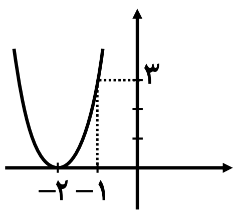
$f(0)=1$ ، $f(1)=2$ و $x=\frac{1}{2}$ طول نقطه عطف نمودار تابع f باشد.

پاسخ:

$$f(x)=ax^3+bx^2+c$$
$$f(0)=1\rightarrow 0+0+c=1\rightarrow c=1$$
$$f(1)=2\Rightarrow a+b+1=2\rightarrow a+b=1$$
$$\text{عطف}\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow f''(\frac{1}{2})=0\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx\Rightarrow f''(x)=6ax+2b$$
$$\Rightarrow f''(\frac{1}{2})=6a\times(\frac{1}{2})+2b=0\Rightarrow 3a+2b=0$$
$$\begin{cases}a+b=1\\3a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a-2b=-2\\3a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}$$

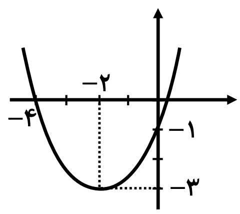
۲۶- اگر شکل کشیده‌شده مربوط به نمودار تابع f' باشد، کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟

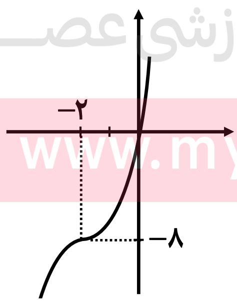
پاسخ:

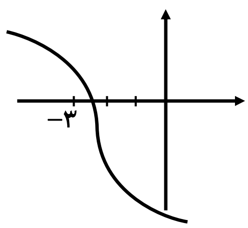


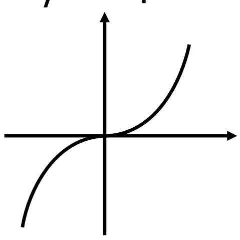
$$x_S<0\Rightarrow\frac{-b}{2a}<0\xrightarrow{a>0}b>0$$

یعنی تابع صعودی و طول نقطه عطف آن منفی باشد، پس شکل (ب) درست است.

الف)


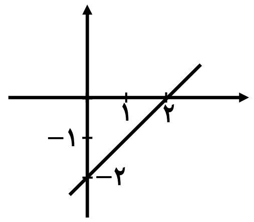
ب)


پ)


ت)


مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۲۷- اگر شکل زیر نمودار تابع f'' باشد، کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد.

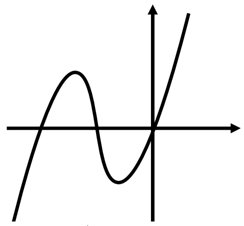


پاسخ:

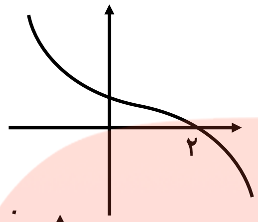
$$y = ax + b \Rightarrow a > ۰\ ,\ b < ۰$$

تابع صعودی و طول نقطه عطف یعنی $x = \frac{-b}{۳a}$ مثبت می‌باشد. که گزینه‌ی (پ) درست است.

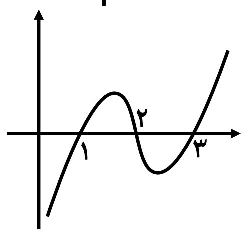
الف)



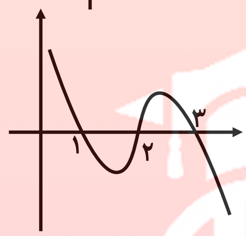
ب)



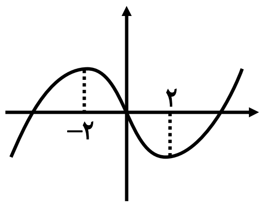
پ)



ت)



۲۸- اگر $(۰,۰)$ نقطه عطف تابع درجه سوم $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a، b و c را پیدا کنید.



پاسخ:

$$y = x^۳ + ax^۲ + bx + c \xrightarrow{(۰,۰)} ۰ + ۰ + ۰ + c = ۰ \Rightarrow \boxed{c = ۰}$$

$$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b$$

$$y'' = ۶x + ۲a$$

$$\xrightarrow[y''=۰]{x=۰} ۶(۰) + ۲a = ۰ \Rightarrow \boxed{a = ۰}$$

$$\xrightarrow[f'(۲)=۰]{\min \quad x=۲} ۳(۲)^۲ + b = ۰ \rightarrow b = -۱۲$$

۲۹- جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۱ \quad D_f = \mathbb{R}$

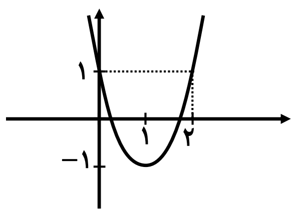
پاسخ:

$$f'(x) = ۴x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$f''(x) = ۴ >$$

$$f(۰) = ۱$$

		۰		۱	
f'	−		−		+
f''	+		+		+
f	↘		↘		↗



ب) $f(x) = x^۳ - ۵x + ۵ \quad D_f = \mathbb{R}$

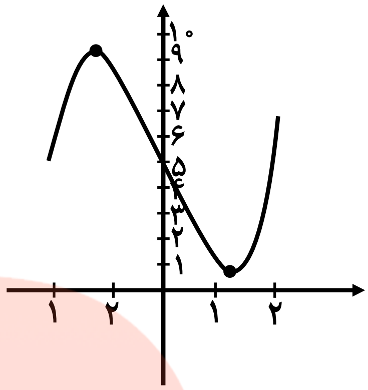
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

پاسخ:

$$f'(x)=3x^2-5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ x=-\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{cases}$$

$$f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$$

	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{3}}$	
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$\frown$		$\frown$	0	$\smile\,+$		$\smile\,+$
f	$\nearrow$	$9/3$	$\searrow$	5	$\searrow$	$0/7$	$\nearrow$



پ) $f(x)=-x(x+2)^2$

پاسخ:

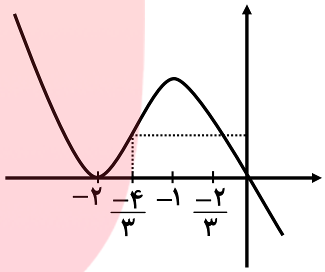
$$f'(x)=(-1)(x+2)^2+2(x+2)(-x)=0$$

$$=(x+2)(-x-2-2x)=(x+2)(-3x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$f''(x)=(1)(-3x-2)+(-3)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow f''(x)=-6x-8=0 \to x=-\frac{4}{3}$$

x		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$	
f'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
f''	$\smile\,+$		$\smile\,+$	0	$\frown$		$\frown$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$



ت) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

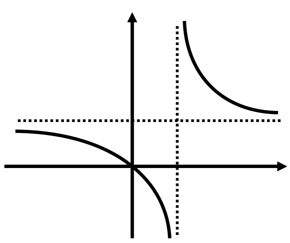
پاسخ:

$$(I)\begin{cases} x=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x-2}=2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)-(1)(2x-1)}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{0-(-3)(2(x-2))}{(x-2)^4}=\frac{+6}{(x-2)^3}$$

x		0		2	
f'	$-$		$-$		$-$
f''	$\frown$		$\frown$		$\smile\,+$
f	$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@riaziT

ث) $f(x)=\dfrac{-x}{x+۳}\qquad D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}$

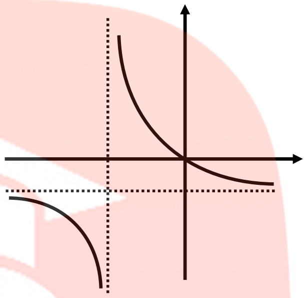
پاسخ:

$$(۱)\begin{cases}\lim\limits_{x\to -۳} f(x)=\pm\infty \Rightarrow x=-۳ & \text{مجانب قائم}\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x}{x+۳}=-۱\Rightarrow y=-۱ & \text{مجانب افقی}\end{cases}$$

$$(۲)\ f'(x)=\frac{-(x+۳)-(۱)(-x)}{(x+۳)^۲}=\frac{-۳}{(x+۳)^۲}$$

$$(۳)\ f''(x)=\frac{۰+۳(۲(x+۳))}{(x+۳)^۴}=\frac{۶}{(x+۳)^۳}$$

		−۳	
f'	$-$		$-$
f''	$\frown\ (-)$		$\smile\ (+)$
f	$\searrow$		$\searrow$



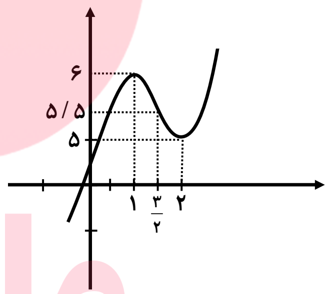
ج) $f(x)=۲x^۳-۹x^۲+۱۲x+۱\qquad D_f=R$

پاسخ:

$$f'(x)=۶x^۲-۱۸x+۱۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=۲\end{cases}$$

$$f''(x)=۱۲x-۱۸=۰\Rightarrow \boxed{x=\frac{۳}{۲}}$$

x	$-\infty$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۲		$+\infty$
f'	+	+	۰	−		−	۰	+	
f''	−	−		−	۰	+		+	
f	$\nearrow$	$\searrow$	۶	$\nearrow$	۵/۵	$\searrow$	۵	$\nearrow$	



۳۰- فرض کنید $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ، محل تقاطع مجانب‌های آن نقطه $(۲,۱)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-۱,۰)$ بگذرد. ضابطه تابع را به دست آورید.

گروه آموزشی
www.my-dars.ir
مای درس

پاسخ:

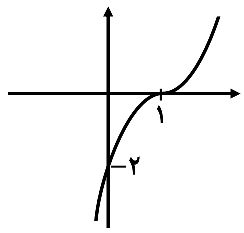
محل تقاطع مجانب‌ها: $(۲,۱)\Rightarrow (۲,۱)=(\dfrac{-d}{c},\dfrac{a}{c})$

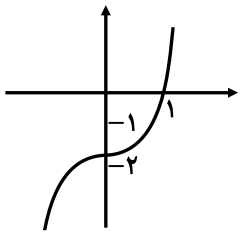
$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-d}{c}=۲\Rightarrow d=-۲c\\ \dfrac{a}{c}=۱\Rightarrow a=c\end{cases}$$

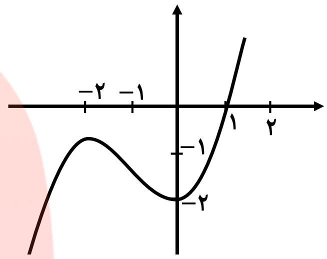
$(-۱,۰)$ صدق $\Rightarrow f(-۱)=۰\Rightarrow \dfrac{-a+b}{-c+d}=۰\Rightarrow -a=-b\Rightarrow a=b$

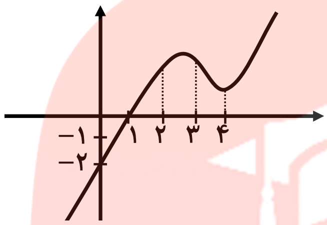
$$f(x)=\frac{ax+a}{ax-۲a}\Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$$

۳۱- کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x)=x^{۳}+x-۲$ است.

الف)


ب)


پ)


ت)


پاسخ:

$$x=\frac{-b}{۳a}=\frac{۰}{۳(۱)}=۰\Rightarrow f(۰)=-۲$$:نقطه عطف

$a>۰\Rightarrow$ تابع صعودی

پس نقطه $(۰,-۲)$ نقطه عطف و تابع صعودی است پس گزینه‌ی (ب) درست است.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

@riaziT